

Die Bestimmung
des optimalen Investitionsprogramms
für Mehrproduktartbetriebe
mit Hilfe des Linear Programming

Dissertation
vorgelegt

der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Staatswissenschaften (Dr. rer. pol.)

von
Diplom-Volkswirt Hermann Langer
Mainz

Die Bestimmung des optimalen Investitionsprogramms
für Mehrproduktartbetriebe
mit Hilfe des Linear Programming

Dissertation

vorgelegt

der

Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät

der

Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der

Staatswissenschaften (Dr. rer. pol.)

von

Diplom-Volkswirt Hermann Langer, Mainz

1962



Referent: Prof. Dr. Münstermann
Korreferent: Prof. Dr. Schwantag
Tag der mündl. Prüfung. 14.12.1961

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	
Einleitung	5
 Teil 1	
I. Die Verfahren von Rummel	14
II. Die Ausführungen Schmalenbachs	17
III. Die Verfahren von Lutz und Schneider	18
IV. Das Verfahren Terborghs	27
V. Investitionsrechnungen in einer geplanten Wirtschaft	35
 Teil 2	
VI. Der Begriff "Linear Programming"	40
VII. Das Ausgangsproblem: Die optimale Produkt- kombination	43
VIII. Ein Spezialfall: Die Wirtschaftlichkeit eines einzelnen Projekts	50
IX. Die optimale Investierung eines gegebenen Investitionsfonds	57
A. Eine Auswahl aus den bisherigen Beiträgen zur Behandlung des Problems	57
B. Die optimale Investierung eines gegebenen Investitionsbetrages im einstufigen Modell	62
Exkurs: Die Vorschläge Albachs	72
C. Die optimale Investierung im mehrstufigen Modell	76
 Teil 3	
X. Die Anpassungsfähigkeit des Linear Programming an die Bedingungen der Praxis	87
A. Die Bedingungen bei der rechentechnischen Ausführung	87

	Seite
B. Die Linearität der Beziehungen	88
XI. Die duale Formulierung (Dual) eines Linear- Programming Modells als Mittel der Investitions- planung	99
A. Form und ökonomische Deutung des Duals	99
B. Die Bedeutung des Duals für die Berechnung der Wirtschaftlichkeit eines Projekts (einstufiges Modell)	102
XII. Ganzzahligkeit bei Linear-Programming-Lösungen	106
XIII. Schluß	118
Literaturübersicht	119

V o r w o r t

Linear Programming ist ein Rechenverfahren, das auf dem Matrizenkalkül beruht. Die Beurteilung der praktischen Anwendungsmöglichkeiten erfordert daher Grundkenntnisse in der Algebra der Matrizen. Diese mathematische Disziplin ist in der Fachliteratur eingehend beschrieben, so daß auf spezielle Erläuterungen verzichtet werden konnte. Besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. Münstermann und Herrn Dr. Busse von Colbe für die Anregung zu dieser Arbeit und für die wertvolle Unterstützung bei der Durchführung. Den Herren Professoren Tucker und Beale danke ich für die freundliche Hilfe bei der Beschaffung wichtiger Literatur und Herrn Dr. Gomory für die Überlassung seiner Forschungsarbeiten.

Köln, im April 1962

Hermann Langer



Digitized by the Internet Archive
in 2026

E i n l e i t u n g

Der vom Markt ausgehende Zwang zur Produktivitätssteigerung stellt die Unternehmensleitungen vor die Aufgabe, zu prüfen, auf welche Art und in welchem Umfang sie den technischen Fortschritt ihrem Unternehmen nutzbar machen können.

Das heißt, es sind Investitionsentscheidungen zu treffen, bei denen die Vor- und Nachteile der verbesserten Anlagen untereinander und gegenüber den vorhandenen Anlagen abzuwägen sind. Nach Gutenberg ¹⁾ durchlaufen die Überlegungen im Rahmen einer Investitionsentscheidung vier Stadien.

In den ersten beiden Stadien werden Rechnungen angestellt, während in den Stadien 3 und 4 nichtquantifizierbare Einflüsse berücksichtigt werden. Die Bedeutung, die der Rechnung im Rahmen der Gesamtüberlegung beigemessen wird, ist von Fall zu Fall je nach der Einstellung des Entscheidenden verschieden. Jedoch gibt das Ergebnis einer von Schindler ²⁾ veranstalteten Umfrage zu denken. Auf die Frage "Lassen Sie sich als Grundlage für Ihre Entscheidung über Anschaffung einer Maschine von Ingenieuren oder kaufmännischen Mitarbeitern eine Wirtschaftlichkeitsrechnung aufstellen?" antworteten 34,1 % der Befragten mit "Nein". An ein ähnliches Ergebnis muß Wessels gedacht haben: "So ergibt sich der eigenartige Zustand, daß wir die Aufwände und Erträge aus gegebenen Anlagen fortlaufend exakter berechnen, während die Anlagen selbst oft auf Grund vager Annahmen zustande kommen" ³⁾. Auch Terborgh stellt fest: "It is still true in general that the analysis and appraisal of investment projects is the most backward area of management" ⁴⁾.

- 1) Vgl. Gutenberg, Erich: Zur neueren Entwicklung der Wirtschaftlichkeitsrechnung, in: "Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft", Band 108, Tübingen 1952, S. 630 ff.
- 2) Vgl. Schindler, Heinz: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, Meisenheim/Glan 1958, S. 190 ff.
- 3) Wessels, Theodor, in: Beiträge zur Wirtschaftsrechnung in der Energieversorgung, Heft 7 der Tagungsberichte des Energiewirtschaftlichen Institutes an der Universität Köln, ohne Jahresangabe, S. 10.
- 4) Terborgh, George: Business Investment Policy, Washington 1958, S. 11.

In Zukunft wird die technische Beurteilung durch den Ingenieur allein, neben die höchstens eine gefühlsmäßige Abschätzung der Wirtschaftlichkeit tritt, immer weniger ausreichen, vor allem wenn man bedenkt, daß die vom einzelnen Investitionsobjekt ausgehenden finanziellen Anforderungen ständig steigen. Schon eine geringfügige Fehlschätzung des aus der neuen Anlage zu gewinnenden Nutzens kann existenzbedrohende Auswirkungen haben.

Keine Investitionsentscheidung kann allein auf Grund einer Investitionsrechnung getroffen werden. Eine Anzahl Faktoren, die entweder überhaupt nicht oder nur durch aufwendige mathematische Behandlung quantifizierbar sind, bleibt außerhalb der Rechnung. Über ihre Auswirkungen sagt das Ergebnis nichts aus. Diese Faktoren sind vor allem "die vielen technischen Unwägbarkeiten" ¹⁾ beim Vergleich einer neuen Maschine mit einer bisher benutzten, die finanziellen Möglichkeiten und die allgemeine und spezielle Geschäftsentwicklung ²⁾. Insoweit der Investor diese Faktoren bei seinen Überlegungen berücksichtigt, bringt er sie auch in Beziehung zu dem Ergebnis der Investitionsrechnung. Das heißt aber, er gewichtet diese Faktoren, mag er sich auch noch so unsicher dabei fühlen. Diese Unsicherheit erhöht sich, wenn das Ergebnis der Investitionsrechnung als die Bezugsgröße eine unzuverlässige Aussage ist.

Wenn zwei Investitionsprojekte zum Beispiel unterschiedliche arbeitsphysiologische Bedingungen aufweisen, dann werden die quantitativen Auswirkungen häufig nur sehr grob geschätzt werden können. Um die relative Bedeutung der unterschiedlichen Bedingungen festzustellen, wird der Investor die Ergebnisse der Investitionsrechnungen heranziehen. Sind diese Ergebnisse mit großer Unsicherheit behaftet, das heißt, muß Unzuverlässiges an Unzuverlässigem gemessen werden, ist bald die Grenze erreicht, von der ab jede Messung ihren Sinn verliert.

1) Gutenberg, Erich: a.a.O., S. 637.

2) Vgl. ebenda, S. 638.

Mit diesen Feststellungen sind zwei Hauptanforderungen bestimmt, die an die Verfahren für Investitionsrechnungen zu stellen sind:

1. Die Rechenergebnisse müssen zuverlässig sein.
2. Es müssen möglichst viele Einflußfaktoren in den objektiven Kalkül einbezogen sein; der Restbereich für die subjektive Abschätzung des Investors muß also möglichst klein bleiben.

In diesem Zusammenhang muß auf die schon erwähnte Umfrage Schindlers hingewiesen werden. Es soll nicht untersucht werden, was jene Unternehmer, die auf die Verwendung einer Investitionsrechnung verzichteten, zu ihrem Verhalten veranlaßt haben könnte. Immerhin, wenn man bedenkt, daß der Kaufmann an das Rechnen gewöhnt ist - "er fühlt sich unsicher, wenn er seine Entscheidungen und Aussagen nicht zahlenmäßig untermauern kann" ¹⁾ - , dann könnte die Bereitschaft, zu Investitionsrechnungen überzugehen, unter anderem davon abhängen, in welchem Ausmaß diese ihren Zweck im Rahmen der Investitionsüberlegungen erfüllen.

Nach Gutenberg ²⁾ ist Wirtschaftlichkeitsrechnung "eine Rechnung, die unmittelbar zu Dispositionen gehört, welche die betrieblichen Produktionsbedingungen im weitesten Sinne des Wortes oder den betrieblichen Leistungsvollzug umgestalten". In diesem Sinne wollen auch wir uns mit Wirtschaftlichkeitsrechnungen befassen. Da jedoch nur die Dispositionen betrachtet werden, die in Zusammenhang mit einer Investition getroffen werden, wird der engere Begriff Investitionsrechnung verwendet. Dabei wird in Anlehnung an den Gebrauch der Praxis unter Investition ein Geldaufwand zum Zwecke der Erweiterung oder Modernisierung der Anlagen verstanden ³⁾.

-
- 1) Schneider, Erich: Sinn und Grenzen der quantitativen Wirtschaftsforschung, in: "Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft", Bd. 108, Tübingen 1952, S. 600.
 - 2) Gutenberg, Erich: a.a.O., S. 644.
 - 3) Gutenberg, Erich: a.a.O., S. 644.- Zum Investitionsbegriff vgl. Pack, Ludwig: Betriebliche Investitionen, Begriff - Funktion - Bedeutung - Arten, Wiesbaden 1959.

Wir wollen uns in der Arbeit mit folgendem Problem befassen:
Ein Betrieb stellt mit den Produktionsfaktoren

$V_1, V_2, \dots, V_n$ die Produkte $X_1, X_2, \dots, X_m$ her. Unter einem Produktionsfaktor wird jede Maschinenart, jede Art von Werkzeug, jede Arbeitsart, jede Materialart verstanden¹⁾.

Eine Produktionsfaktoreinheit wird als Leistungspotential aufgefaßt. Im Verlauf einer Periode wird der jeweiligen Anzahl Produktionsfaktoreinheiten die Leistungsmenge v entnommen. Die hergestellte Menge eines Produkts wird mit x bezeichnet²⁾. Der Betrieb habe die Produktionsfunktion

$$(0') \quad F(x_1, x_2, \dots, x_m; v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 \quad 3)$$

Für die Herstellung jedes Produktes X_1 soll je ein Produktionsverfahren existieren, das heißt, aus der Menge aller Faktorkombinationen sind nur einige realisierbar⁴⁾. Für die ersten k ⁵⁾ Produktionsfaktoren soll für einen Zeitraum T gelten:

$$v_j \leq b_j \quad (j=1, \dots, k) \quad b_j: \text{die Zahl der Leistungseinheiten, die dem Faktor } V_j \text{ während } T \text{ entnommen werden kann.}$$

-
- 1) Vgl. Laßmann, Gert: Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Kosten-theorie, Köln und Opladen 1958, S. 21.
 - 2) Es wird im folgenden stets angenommen, daß in einer Periode Herstellmenge = Absatzmenge ist.
 - 3) Vgl. Förstner, Karl; Henn, Rudolf: Dynamische Produktions-theorie und Lineare Programmierung, Meisenheim 1957, S. 20 ff.
 - 4) Es ist auch möglich, daß einige der Produktionsfaktoren überhaupt nicht in Anspruch genommen werden und/oder daß einige Produkte überhaupt nicht produziert werden.
 - 5) Es wird angenommen, daß es unter den insgesamt n Produktionsfaktoren k Produktionsfaktoren gibt, deren Leistungspotentiale während des Zeitraums T als fix gelten müssen. Die Leistungspotentiale der übrigen $n-k$ Produktionsfaktoren können während T verändert werden.

Im Zeitraum T seien die Kostenkurve und die Erlöskurve des Betriebes Gerade. Der Gewinn des Zeitraumes T ist also

$$G_T = \sum_{i=1}^m e_i x_i - \sum_{j=1}^n p_j v_j \quad \text{oder bei Zurechnung auf}$$

die Kosten- und Erlösträger

$$= \sum_{i=1}^m d_i x_i - K_f$$

e_i : Stückerlös für X_i
 p_j : Verrechnungspreis ¹⁾ für die Leistungseinheit von V_j
 K_f : Fixkosten in T
 k_i : proportionale Stückkosten für X_i
 d_i : $e_i - k_i$

Mit Hilfe der optimalen Produktkombination ($x'_1, \dots, x'_m$) wird

G_T maximiert:

$$G_{T \text{ Max}} = G' = \sum_{i=1}^m d_i x'_i - K_f$$

Für Investitionen stehe der Betrag C zur Verfügung, der zur Anschaffung weiterer Einheiten der Produktionsfaktoren V_j verwendet werden kann. Darüber hinaus soll es h Produktionsfaktoren geben, die sich zur Einfügung in das Betriebssystem eignen und von denen ebenfalls Einheiten angeschafft werden können ²⁾. Der Betrieb beabsichtige, mit Hilfe einer Wirtschaftlichkeitsrechnung festzustellen, für welche Projekte und mit welchen Teilbeträgen der Gesamtbetrag C einzusetzen ist, damit für eine neue Produktionsfunktion

-
- 1) Unter dem Verrechnungspreis ist der von betriebs- und periodenfremden Faktoren bereinigte Aufwand für den Ge- und Verbrauch von Produktionsfaktoren zu verstehen.
 - 2) Produktionsfaktoren, deren Leistungspotential für den Zeitraum T als veränderlich gelten kann, bleiben in der Planungsrechnung unberücksichtigt.

$$(O'') \quad F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+r}; \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, v_{n+1}, \dots, v_{n+h}, v_{n+s}) = 0$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} \bar{v}_j &\leq b_j + \Delta b_j & (j = 1, 2, \dots, k) \\ v_q &\leq b_q & (q = n+1, \dots, n+h) \end{aligned}$$

($\Delta b_j, b_q$: durch Investierung gewonnenes Leistungspotential)

der Ausdruck

$$\begin{aligned} G_I &= \sum_{i=1}^m \bar{x}_i d_i + \sum_{j=m+1}^{m+r} x_j d_j - G' - Kf_I \\ &= \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - x'_i) d_i + \sum_{j=m+1}^{m+r} x_j d_j - \Delta Kf \\ &\quad (Kf_I - Kf = \Delta Kf) \end{aligned}$$

ein Maximum wird.

Die Produktionsfunktion (O'') umschreibt allgemein einen Handlungsspielraum, der darin besteht, mit Hilfe bestimmter Einsatzmengen von $n+s$ Produktionsfaktoren einen Ausstoß von $m+r$ bestimmten Produktmengen erzielen zu können. Die in (O') auftretenden Faktoren und Produkte werden auch von (O'') erfaßt, jedoch möglicherweise in veränderten Proportionen, was durch den Querstrich angedeutet ist.

In dieser Formulierung des Problems ist die im Zeitablauf liegende Dynamik ausgeschlossen. Die Betrachtung bleibt auf den Zeitraum T beschränkt. Der Umfang von T läßt sich zwar nicht eindeutig bestimmen, aber es läßt sich in den meisten Fällen eine Obergrenze angeben, von der ab das Leistungspotential keines der Produktionsfaktoren mehr als fix gelten kann. Ebenso gibt es eine Untergrenze, bis zu der die Leistungspotentiale aller Produktionsfaktoren als fix zu gelten haben. Die Bestimmung von T stellt einen Kompromiß dar. Je nach dem Zweck der Rechnung wird man sich dabei mehr der Untergrenze oder der Obergrenze nähern. Für unser Problem wird angenommen, daß für die Ausdehnung von T ein Jahr bestimmt wurde.

Wenn ebenfalls angenommen wird, daß der Investor über keine weiter in der Zukunft liegende Daten verfügt, deren Sicherheit es

ihm gerechtfertigt erscheinen läßt, eine Rechnung auf sie zu stützen, so ist die gestellte Aufgabe gelöst, sobald diejenige Produktkombination bestimmt ist, die zu einem maximalen G_I führt. Im Rahmen der vorhandenen Informationen stellt die betreffende Kombination das optimale Investitionsprogramm für den Betrieb dar. Dies trifft auch dann zu, wenn zwar weitere geeignete Daten vorliegen, diese aber gegenüber den verarbeiteten Daten keine Veränderungen aufweisen.

Wir kommen nun zu einer Erweiterung unserer Problemstellung: Es soll dasjenige Investitionsprogramm bestimmt werden, das sich im Rahmen der für eine Verarbeitung in einer Rechnung geeigneten Informationen als optimal darstellt. Die Erweiterung beruht darauf, daß über den begrenzten Zeitraum T hinaus geeignete Informationen zur Verfügung stehen können. Der Betrieb besitze für das zum Zeitpunkt der Planrealisierung beginnende Jahr t_1 und das anschließende Jahr t_2 Daten, deren Sicherheit er so einschätzt, daß eine Verarbeitung in einer Rechnung gerechtfertigt erscheint. Der Betrieb habe wieder n Produktionsfaktoren V_j ($j=1\dots n$), mit denen m Produkte X_i ($i=1\dots m$) hergestellt werden können. Es wird mit $x_{i,r}$ ($r=1,2$) die Zahl der in der Periode r produzierten Mengeneinheiten des Produkts X_i und mit $v_{j,r}$ die in der Periode r dem Faktor V_j entnommene Zahl Leistungseinheiten bezeichnet. Die Produktionsfunktion lautet

$$F(x_{1,1}\dots x_{m,1}, x_{1,2}\dots x_{m,2}; v_{1,1}\dots v_{k,1}, \dots v_{n,1}, v_{1,2}\dots v_{k,2}\dots v_{n,2}) = 0.$$

Es existiere wieder für jedes Produkt ein Produktionsverfahren. Ebenfalls soll wieder gelten

$$v_{j,r} \leq b_{j,r} \quad \begin{matrix} (j = 1 \dots n) \\ (r = 1, 2) \end{matrix}$$

Die Größe $G^{(r)}$ soll bestimmt sein durch

$$G^{(r)} = \sum_{i=1}^m x_{i,1} d_{i,1} - Kf_1 + \sum_{i=1}^m x_{i,2} d_{i,2} - Kf_2 \quad 1)$$

1) Für $r > 1$ ist wegen der Vergleichbarkeit in den meisten Fällen Multiplikation mit einem Diskontierungsfaktor erforderlich. Der Übersichtlichkeit wegen wird dies bei den Bezeichnungen nicht berücksichtigt.

$G^{(r)}$ wird zu einem Maximum, wenn die optimale Produktkombination $(x'_{1,1} \dots x'_{m,1}, x'_{1,2} \dots x'_{m,2})$ realisiert wird:

$$G_{\text{Max}}^{(r)} = \sum_{i=1}^m x'_{i,1} d_{i,1} - Kf_1 + \sum_{i=1}^m x'_{i,2} d_{i,2} - Kf_2 = g^{(r)} - Kf^{(r)}.$$

Ganz analog lauten die durch die Anzahl und die Eigenschaften der Investitionsprojekte ermöglichte neue Produktionsfunktion

$$(0''') \quad F(\bar{x}_{1,1} \dots \bar{x}_{m,1}, x_{m+1,1} \dots x_{m+r,1}, \bar{x}_{1,2} \dots \bar{x}_{m,2}, x_{m+1,2} \dots x_{m+r,2}; \bar{v}_{1,1} \dots \bar{v}_{k,1} \dots \bar{v}_{n,1}, v_{n+1,1} \dots v_{n+h,1} \dots v_{n+s,1}, \bar{v}_{1,2} \dots \bar{v}_{k,2} \dots \bar{v}_{n,2}, v_{n+1,2} \dots v_{n+h,2} \dots v_{n+s,2}) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{und die Bedingungen} \quad \bar{v}_{j,r} &\leq b_{j,r} + \Delta b_{j,r} & (j = 1 \dots n) \\ & & (r = 1, 2) \\ & & (q = n+1 \dots n+h) \\ v_{q,r} &\leq b_{q,r} & (r = 1, 2) \end{aligned}$$

Durch die Zuordnung des gewonnenen Leistungspotentials an die Perioden ist es nunmehr möglich, die Installationsdauer zu berücksichtigen. Gesucht wird die Projektkombination, für die der Ausdruck

$$\begin{aligned} G_I &= \sum_{i=1}^m \bar{x}_{i,1} d_{i,1} + \sum_{j=m+1}^{m+r} x_{j,1} d_{j,1} - Kf_1^{(I)} + \sum_{i=1}^m \bar{x}_{i,2} d_{i,2} + \\ &\quad \sum_{j=m+1}^{m+r} x_{j,2} d_{j,2} - Kf_2^{(I)} - G_{\text{Max}}^{(r)} \\ &= \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i,1} - x'_{i,1}) d_{i,1} + \sum_{j=m+1}^{m+r} x_{j,1} d_{j,1} + \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i,2} - x'_{i,2}) d_{i,2} \\ &\quad + \sum_{j=m+1}^{m+r} x_{j,2} d_{j,2} - \Delta Kf \quad (\Delta Kf = Kf_1^{(I)} + Kf_2^{(I)} - Kf^{(r)}) \end{aligned}$$

zum Maximum wird.

Es bedeuten: $K_f^{(I)}_p$: die bei Gültigkeit von $(0''')$ in der Periode p anfallenden Fixkosten
 $K_f^{(r)}$: die Fixkosten aus $G_{\text{Max}}^{(r)}$
 $\bar{x}_{i,p}$: die durch $(0''')$ bestimmte Menge des Produkts X_i in der Periode p
 $x_{i,p}$: die $G_{\text{Max}}^{(r)}$ entnommene optimale Menge von X_i in p ($i=1,2,\dots,m$)
 $e_{q,p}$: Stückerlös für Produkt X_q in der Periode p
 $k_{q,p}$: proportionale Stückkosten für X_q in p
 $d_{q,p} = e_{q,p} - k_{q,p}$ ($q = 1,2,\dots,m+r$) .

Die betreffende Kombination stellt das im Rahmen der vorhandenen Informationen optimale Investitionsprogramm dar. Der Übergang zum allgemeinen Fall, bei dem der Investor zur Verarbeitung geeignete Daten nicht aus zwei, sondern aus z Perioden besitzt, ist nun nicht schwierig. Zu seiner Beschreibung kann die in $(0')$, G_T und $(0''')$, G_I gewählte Formulierung beibehalten werden. Bei entsprechender Wahl der Bezeichnung lautet beispielsweise die Produktionsfunktion für einen Betrieb mit den Produkten X_i ($i=1 \dots m$), den Produktionsfaktoren V_j ($j=1 \dots n$) und für z Perioden

$$F(x_{1,1} \dots x_{m,1}, x_{1,2} \dots x_{m,2}, \dots, x_{1,z} \dots x_{m,z}, v_{1,1}, \dots, v_{n,1}, v_{1,2}, \dots, v_{n,2}, \dots, v_{1,z}, \dots, v_{n,z}) = 0$$

Soweit das zu untersuchende Problem. Im Teil 1 der Arbeit wird die Leistungsfähigkeit der hauptsächlichlichen traditionellen Verfahren für Investitionsrechnungen im Hinblick auf die gestellte Aufgabe geprüft. Im Teil 2 wird die Lösung des Problems mit Hilfe des Linear Programming gezeigt, indem dieses Verfahren zunächst auf eine einfache Fragestellung angesetzt wird, die dann schrittweise erweitert wird. Im Teil 3 werden einige spezielle Fragen behandelt, die mit dem Einsatz von Linear Programming verbunden sind, von denen im Teil 2 aber zunächst abgesehen wurde.

Teil 1

I. Die Verfahren von Rummel

Bei Rummel ¹⁾ ist die Wirtschaftlichkeitsrechnung entweder ein Kostenvergleich oder eine Bewertung.

In einem bewußt stark vereinfachten Beispiel vergleicht Rummel einen älteren Halbgasofen mit einem neueren Ferngasofen, indem er die jeweiligen Kosten, bezogen auf eine zweckmäßige Maßeinheit (zum Beispiel eine Betriebsstunde) einander gegenüberstellt und daraus die Kostendifferenz pro Zeiteinheit berechnet. Und zwar vergleicht Rummel die auf die Maßeinheit bezogenen und als konstant angenommenen Betriebs- und Instandhaltungskosten des vorhandenen Objekts mit der Summe aus Betriebs- und Instandhaltungskosten und Kapitaldienst des geplanten Objekts für die gleiche Bezugsbasis.

Rummel weist darauf hin, daß man eine Wirtschaftlichkeitsrechnung nur dann als "Kostenvergleich von verschiedenen Möglichkeiten der Herstellung von Gütern" ²⁾ durchführen kann, wenn die Stückerlöse gleich sind.

Auf einen anderen Umstand, der aber auch für andere traditionelle Verfahren gilt, weist Rummel ebenfalls hin. Dem Betrieb ist wenig geholfen, wenn er weiß, welche von zwei bestimmten aus evtl. n möglichen Investitionen wirtschaftlicher ist.

"Deshalb muß zuerst überlegt werden, welche Möglichkeiten überhaupt bestehen und demnach zu vergleichen sind; oft sind es mehr als zwei Möglichkeiten, in diesem Fall löst sich die Wirtschaftlichkeitsrechnung in mehrere Einzelvergleiche auf, von denen jeder 2 Möglichkeiten vergleicht" ³⁾.

1) Vgl. Rummel, Kurt: in: Wirtschaftlichkeitsrechnung, Düsseldorf 1941; (Sammelband von "Archiv für das Eisenhüttenwesen").

2) Ebenda, S. 6.

3) Ebenda, S. 15.

Diese Feststellungen gelten für den Fall, daß nicht alle projektierten Objekte das gleiche Objekt ersetzen sollen. Schindler baut in seiner Arbeit den Rummelschen Kostenvergleich noch etwas weiter aus ¹⁾: Um die Kosten einer anzuschaffenden Maschine angeben zu können, muß der Investor zuvor die Lebensdauer schätzen. Wenn er das wegen der damit verbundenen Unsicherheit vermeiden will, muß er die Annahme konstanter jährlicher Betriebs- und Instandhaltungskosten fallen lassen. Nimmt der Investor an, daß die jährlichen Betriebs- und Instandhaltungskosten B von Jahr zu Jahr um den Betrag ΔB zunehmen, dann kann er die jährlichen Gesamtkosten

$$K = B + \Delta B t + k(t) \quad (k(t) = \text{Kapitaldienst})$$

bei variabler Lebensdauer minimieren. Der Investor braucht also die Lebensdauer nicht zu schätzen, dafür muß er die jährliche Erhöhung der Betriebs- und Instandhaltungskosten angeben. Diese Ausweichmöglichkeit kann in manchen Fällen wertvoll sein.

Im Hinblick auf unser Problem erfaßt der Kostenvergleich nur einen speziellen Sachverhalt. Es werden nämlich nur die zwei Faktorkombinationen

$$v^I = (v_1^I, v_2^I, \dots, v_n^I)$$

$$v^{II} = (v_1^{II}, v_2^{II}, \dots, v_m^{II}) \quad \text{betrachtet. Es wird an-}$$

genommen, daß für

$$G^I = E^I - \sum_{j=1}^n p_j^I v_j^I \quad (E^I = \sum_{i=1}^k e_i^I x_i^I)$$

$$\text{und } G^{II} = E^{II} - \sum_{j=1}^m p_j^{II} v_j^{II} \quad (E^{II} = \sum_{i=1}^l e_i^{II} x_i^{II})$$

Gilt $E^I = E^{II}$, so reduziert sich die Beurteilung auf einen Vergleich der beiden Größen

1) Schindler, Heinz: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, S. 106 ff.

$$K^I = \sum_{j=1}^n p_j^I v_j^I$$

$$K^{II} = \sum_{j=1}^m p_j^{II} v_j^{II} .$$

Das Urteil lautet: Die Möglichkeit I ist der Möglichkeit II vorzuziehen, wenn $K^I < K^{II}$. Die Möglichkeit II ist günstiger als die Möglichkeit I, wenn $K^{II} < K^I$.

Die zweite Form, die Rummel vorschlägt, ist die Bewertungsrechnung. Aus der Feststellung "Jede Berechnung der Wirtschaftlichkeit läuft auf einen Vergleich hinaus, die Rechnung besteht daher in der Lösung einer Gleichung" ¹⁾ folgt beispielsweise folgender Ansatz (die zu vergleichenden Fälle seien mit 1 und 2 bezeichnet):

Rohstoffe₁ + Fertigungslohn₁ + Kapitaldienst₁ + sonstige Kosten₁ - Gutschriften₁ = Rohstoffe₂ + Fertigungslohn₂ + Kapitaldienst₂ + sonstige Kosten₂ - Gutschriften₂.

In dieser Gleichung kann jedes Glied als Unbekannte betrachtet werden, wenn alle anderen Glieder bekannt sind ²⁾. Auch die Bewertungsrechnung ³⁾ erfaßt nur einen speziellen Fall unseres Problems. Es werden wieder nur zwei Faktorenkombinationen v^I und v^{II} betrachtet, denen die Produktkombinationen x^I und

1) Rummel, Kurt: a.a.O., S. 10.

2) Dieser Gedanke findet sich auch bei Schneider, Erich: Wirtschaftlichkeitsrechnung, S. 62 ff.

3) Die Bewertungsrechnung wird in Form der Pay - off - Methode (vgl. Gordon, I. Myron: The Pay off period and the Rate of Profit, in: "The Journal of Business", Vol. XXVIII, Chicago 1955, S. 253 ff.) bei praktischen Rechnungen häufig verwendet. Es geht dabei um die Bestimmung des Zeitraumes, in dem die Anschaffungskosten in den Nettoerträgen wiedererlangt werden. Die Pay - off - Methode ist eine Risikobetrachtung, sie bedeutet "einen Verzicht auf die 'wirtschaftlichste' Investition, zugunsten der Gewißheit, bei plötzlich (nach zwei oder drei Jahren) auftretenden einschneidenden Veränderungen doch wenigstens die Anschaffungskosten der Maschine in den jährlichen Nettoerträgen dieser kurzen Zeit wiedererlangt zu haben" (vgl. Schindler, Heinz: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, S. 159).

x^{II} zugeordnet werden. Sind die beiden Möglichkeiten gleichwertig, so gilt die Gleichung $K^I - E^I = K^{II} - E^{II}$. Die Möglichkeit I ist günstiger als die Möglichkeit II, wenn $E^{II} < K^{II} - (K^I - E^I)$. Ist dagegen $E^{II} > K^{II} - (K^I - E^I)$, dann ist die Möglichkeit I ungünstiger als die Möglichkeit II.

II. Die Ausführungen Schmalenbachs

In "Kostenrechnung und Preispolitik" ¹⁾ befaßt sich Schmalenbach unter anderem mit Problemen, die im Rahmen der hier zu untersuchenden Fragestellung für Investitionsrechnungen liegen.

" wenn jemand ein Haus baut, so hat er viele Möglichkeiten, dieses Projekt durchzuführen. Er wird aber schon der Kosten wegen nicht so weit gehen, alle möglichen Projekte genau veranschlagen zu lassen. Die Entscheidung fällt gewöhnlich für ein Projekt, das zweckmäßig nur sehr ungenau mit seinen Konkurrenzprojekten verglichen wird.....Aber daneben gibt es zahlreiche Fälle im Wirtschaftsleben, in denen für einzelne Gegenstände Werte exakt bestimmt werden müssen, und wo man sich nicht damit begnügen kann, lediglich eine gewisse Wertrelation zu finden" ²⁾. Schmalenbach nennt den Wert eines Gutes im Hinblick auf eine bestimmte Zweckausrichtung die optimale Geltungszahl ³⁾. Der Wert, der einer Anlage im Rahmen eines Betriebes beizumessen ist, ist nach Schmalenbach aus dem Grenznutzen zu bestimmen.

Zu der optimalen Verwendung eines Investitionsfonds schreibt Schmalenbach: "Sind viele Nutzungsmöglichkeiten vorhanden, so sollen die besonders günstigen zuerst, nach ihnen die weniger wichtigen und zuletzt, wenn das verfügbare Neukapital der Erschöpfung entgegengeht, die dann noch übrigbleibenden Grenzfälle berücksichtigt werden.... Die optimale Geltungszahl für den Kapitalzins ist also der mit Neukapital erzielbare Nutzen,

1) Schmalenbach, Eugen: Kostenrechnung und Preispolitik, 7. erweiterte und verbesserte Auflage, bearbeitet von Dr. Richard Bauer, Köln und Opladen, 1956.

2) Ebenda, S. 137.

3) Ebenda, S. 138.

den die an letzter Stelle zur Verwendung kommende Kapitalmenge ermöglicht" ¹⁾.

Der Vorschlag Schmalenbachs, einen Investitionsfonds schrittweise, beginnend mit den günstigsten Investitionsmöglichkeiten auszuschöpfen, setzt voraus, daß eine eindeutige Rangordnung der Investitionsmöglichkeiten existiert. Das ist im Rahmen unseres Problems nur bei einem speziellen Sachverhalt der Fall. Voraussetzung für eine eindeutige Rangordnung ist, daß die einzelnen Projekte vollkommen unabhängig sind. Das heißt, sie dürfen weder mit den bisher vorhandenen Anlagen noch mit den konkurrierenden Projekten in einem Betriebssystem technologisch verbunden sein. Sobald diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, gibt es den Nutzwert einer Projekteinheit als selbständige Größe nicht, weil er dann ganz davon abhängt, von welcher Kombination die betreffende Projekteinheit ein Element ist.

III. Die Verfahren von Lutz und Schneider ²⁾

Den Verfahren von Lutz und Schneider liegt die Frage zugrunde: welche Zahlungen ³⁾ werden durch eine Investition verursacht? Damit alle mit der Investition zusammenhängenden Aus- und Einzahlungen erfaßt werden, soll ein Zeitraum betrachtet werden, dessen Ausdehnung durch den frühesten Zahlungszeitpunkt t_0 und den spätesten Zahlungszeitpunkt t_n bestimmt ist. Mit Schneider ⁴⁾ wird für eine Zahlungsreihe angenommen, daß die Zahlungen nicht kontinuierlich über den ganzen Zeitraum vorgenommen werden, sondern nur zu den Zeitpunkten $t_0, t_1, \dots, t_n$. Der Zeitraum wird in n gleich große Intervalle unterteilt, die durch die Zeit-

1) Ebenda, S. 220 f.

2) Vgl. Lutz, Friedrich und Vera: The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951; Schneider, Erich: Wirtschaftlichkeitsrechnung, 2. Auflage, Tübingen-Zürich 1957.

3) Wir folgen der Terminologie Schneiders und verstehen unter Auszahlung (Einzahlung) einen Kassenabgang (Kassenzugang) und unter Ausgabe (Einnahme) das geldmäßige Äquivalent eines Kaufes (Verkaufes). Da wir von Kreditkäufen und -verkäufen absehen, bezeichnen die Ausdrücke Ausgabe und Auszahlung bzw. Einnahme und Einzahlung jeweils den gleichen Sachverhalt.

4) Schneider, Erich: Wirtschaftlichkeitsrechnung, S. 3.

punkte $t_0, t_1, \dots, t_n$ begrenzt werden. Werden die Auszahlungen mit a und die Einzahlungen mit e bezeichnet, dann ist die Auszahlungsreihe : $a_0, a_1, \dots, a_n$ und die Einzahlungsreihe : $e_0, e_1, \dots, e_n$ ¹⁾. Ausgaben und Einnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten sind wirtschaftlich etwas Verschiedenes. Sie sind nicht unmittelbar vergleichbar. Der Direktvergleich ist nur dann erlaubt, wenn $t_0 = t_n$, das heißt, wenn die Ausgaben oder Einnahmen in einem einzigen Zeitpunkt anfallen. Für die meisten praktischen Investitionsfälle ist diese Bedingung nicht erfüllt. Die Ausgaben und Einnahmen müssen durch Diskontieren auf den Zeitpunkt unmittelbar vor Durchführung der Investition gleichrangig gemacht werden. Ein solches Vorgehen wird Diskontierungsmethode genannt. Die Ausgaben werden in den Einnahmen wiedergewonnen, wenn für den gewählten Zinsfuß von $p\%$ der Kapitalwert, wie man die Differenz zwischen den diskontierten Einnahmen (= Barwert der Einnahmen) und den diskontierten Ausgaben (= Barwert der Ausgaben) nennt, nicht negativ ist.

Der allgemeine Ausdruck für diese Bedingung lautet:

$$E - A \stackrel{>}{\geq} 0 \quad \text{oder}$$

$$(1) \quad (e_0 + \frac{e_1}{q} + \frac{e_2}{q^2} + \dots + \frac{e_n}{q^n}) - (a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \dots + \frac{a_n}{q^n}) \geq 0$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

E = Barwert der Einnahmen

A = Barwert der Ausgaben.

Unter mehreren alternativen Investitionsmöglichkeiten ist die vorteilhafteste diejenige mit dem größten Kapitalwert, unter der Voraussetzung, daß beliebige Beträge zu dem Zinsfuß von $p\%$ geliehen und verliehen werden können ²⁾.

1) Wird zum Zeitpunkt t_1 keine Auszahlung oder Einzahlung vorgenommen, dann ist $a_1=0$ oder $e_1=0$.

2) Diese Voraussetzung muß gemacht werden, damit die Kapitalwerte von Investitionen verschiedener Dauer unmittelbar verglichen werden können. Die Differenzinvestition, die die unterschiedlichen Ausgabebeträge und den Unterschied in der Investitionsdauer ausgleicht, hat bei der erwähnten Voraussetzung einen Kapitalwert von Null.

Die Diskontierungsmethode kann in die Annuitätenmethode umgeformt werden. Aus der Rentenrechnung ist die Formel

$$(2) \quad k_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$$

bekannt, die den Barwert k_0 für die n -mal vorzunehmende Zahlung der Raten r angibt. Der Zahlungszeitpunkt liegt jeweils am Ende der n gleich langen Perioden.

Der Zinsfuß pro Periode beträgt $p\%$. In die Formel (2) werden die Barwerte eingesetzt und dann wird nach r aufgelöst:

$$(3) \quad r_E = E \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1} \text{ bzw. } r_A = A \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1}$$

Damit sind die zeitlich und der Höhe nach ungleichen Beträge e_1 und a_1 über ihre Barwerte in je n gleiche r_E und r_A umgeformt. Da für

$$(1) \quad E - A \geq 0 \text{ stets } (4) \quad r_E \geq r_A,$$

kann die Bedingung für die Wiedergewinnung der Ausgaben auch in die Form (4) gekleidet werden.

Von mehreren Investitionsmöglichkeiten ist unter der Voraussetzung, daß beliebige Beträge zu $p\%$ geliehen und verliehen werden können, die die vorteilhafteste, bei der $(r_E - r_A)$ am größten ist.

Es gibt noch ein drittes Verfahren, die Interne-Zinsfuß-Methode. Deren praktischer Wert ist jedoch umstritten ¹⁾. Der Grundgedanke besteht darin, den Kapitalwert Null zu setzen und den Zinsfuß p als variabel anzusehen:

$$(5) \quad e_0 + \frac{e_1}{q} + \dots + \frac{e_n}{q^n} = a_0 + \frac{a_1}{q} + \dots + \frac{a_n}{q^n}.$$

1) Vgl. Boulding, K.E.: Time and Investment, in: "Economica", Vol. III, New Series, London 1936, S. 196 ff; Time and Investment, A Reply, ebenda, S. 440 ff; Wright, C.A.: A Note on Time and Investment, ebenda, S. 436; Schindler, Heinz: Meisenheim 1958, S. 55 ff.

Wie man mit Hilfe der Gleichungslehre erkennt, ist die Lösung einer solchen Gleichung im allgemeinen recht umständlich. Für $n > 4$ ist eine exakte Berechnung nicht mehr möglich, und der Investor ist gezwungen mit Näherungsverfahren zu arbeiten. Wie dabei systematisch vorzugehen ist, hat Boulding ¹⁾ dargestellt. Unter Umständen existiert überhaupt keine reelle Wurzel, oder es existieren mehrere reelle Wurzeln, denn eine Gleichung n -ten Grades hat n Wurzeln, die reell oder imaginär sein können. Sieht man von diesen Schwierigkeiten ab, dann lautet die Bedingung für eine Wiedergewinnung der Ausgaben bei angemessener Verzinsung:

$$(6) \quad p_{\text{intern}} \geq p_{\text{kalk}} \quad 2)$$

p_{intern} = der errechnete
interne Zinsfuß
in %

p_{kalk} = der bei der be-
trachteten Investition
für angemessen ge-
haltene Zinsfuß.

Die vorteilhafteste aus mehreren Investitionsmöglichkeiten ist jedoch nicht immer die mit dem größten p_{intern} , da es nicht auf den relativen, sondern auf den absoluten Vor-

1) Vgl. Boulding, K.E.: a.a.O., S. 215 ff.- Auf die Möglichkeit der Approximation weist Albach hin (Albach, Horst: Wirtschaftlichkeitsrechnungen bei unsicheren Erwartungen, Köln und Opladen 1959, S. 41).

2) Diese Bedingung gilt nicht für den praktisch seltenen Spezialfall, bei dem die Ausgaben im ganzen später vorgenommen werden als die Einnahmen (vgl. Schneider, Erich: Wirtschaftlichkeitsrechnung, S. 9 f.).

Er bleibt bei unseren Überlegungen außer Betracht.

teil ankommt ¹⁾.

Zu ihrer Bestimmung muß die Differenzmethode ²⁾ benutzt werden. Hierbei werden die Zahlungsreihen von Differenzinvestitionen ermittelt, indem man Situationen betrachtet, wie sie entstehen, wenn eine Investition durchgeführt und dafür auf eine andere Möglichkeit verzichtet wird. Für die Differenzinvestition wird der interne Zinsfuß errechnet und mit dem Kalkulationszinsfuß ³⁾ verglichen. Wenn die zur Durchführung vorgesehene Investition vorteilhafter sein soll als die, auf deren Durchführung laut Rechnung verzichtet wird, muß der interne Zinsfuß größer sein als der Kalkulationszinsfuß ⁴⁾.

1) Zur Erläuterung soll folgendes Beispiel dienen:

Maschine A : Anschaffungskosten 37 Geldeinheiten (GE),
Einnahmen 5 Jahre jeweils am Jahresende
10 GE, Kalkulationszinsfuß 5 %.

Es errechnet sich ein Kapitalwert von
6,28 GE = 43,28 GE (Barwert der Einn.) -
37 GE (Barwert der Ausg.) und ein interner
Zinsfuß von 10 %.

Maschine B : Anschaffungskosten 20 GE, Einnahmen 6 Jahre
jeweils am Jahresende 5 GE, Kalkulationszins-
fuß 5 %.

Der Kapitalwert beträgt 5,38 GE = 25,38 GE
(Barwert der Einnahmen) - 20 GE (Barwert
der Ausgaben).

Der gegenüber der Maschine A kleinere Kapital-
wert ist aber mit einem größeren internen
Zinsfuß von 13 % verbunden.

2) Vgl. Schneider, Erich: Wirtschaftlichkeitsrechnung, S.38 ff.

3) Es gilt hier wiederum die Voraussetzung von Seite 19, Anm. 2.

4) Zu dem internen Zinsfuß einer Investition vgl. Dürr, Karl:
Investitionsrechnung, Band I, Bern 1958, S. 114 ff.

Der interne Zinsfuß wird auch rate of return genannt.

Vgl. Dean, Joel: Measuring the Productivity of Capital,
in: "Harvard Business Review", 1954, Nr. 1, Vol. 32,
S. 120 ff., insbes. S. 128.

Dazu folgendes Beispiel:

Maschine A			Maschine B	
Zeitpunkt	Ausgaben	Einnahmen	Ausgaben	Einnahmen
0	100000.-	-	60000.-	-
1	-	30000.-	-	30000.-
2	-	40000.-	-	35000.-
3	-	40000.-		

Als Zeitraum zwischen den Zeitpunkten wird 1 Jahr angenommen. Die Differenzinvestition A - B bezeichnet die Situation, wenn Maschine A angeschafft und dafür auf die Anschaffung der Maschine B verzichtet wird:

Differenzinvestition A - B		
Zeitpunkt	Ausgaben	Einnahmen
0	40000.-	-
1	-	-
2	-	5000.-
3	-	40000.-

$$40000 = 5000q^{-2} + 40000q^{-3}$$

$$q \approx 1,042$$

Der interne Zinsfuß der Differenzinvestition beträgt ca. 4,2 %. Rechnet der Investor mit einem Kalkulationszinsfuß, der kleiner ist als 4,2 %, ist die Anschaffung der Maschine A günstiger als die Anschaffung der Maschine B.

Die Darstellung der Diskontierungs-, Annuitäten- und internen Zinsfußmethode soll durch ein einfaches Zahlenbeispiel ergänzt werden:

Eine Maschine habe einen Anschaffungspreis von 120000.- DM und eine geschätzte wirtschaftliche Lebensdauer von drei Jahren. Der Kalkulationszinsfuß sei 5 %. Die Einnahmen sollen betragen:

am Ende des ersten Jahres 50000.- DM
 am Ende des zweiten Jahres 55000.- DM
 am Ende des dritten Jahres 60000.- DM ,

Der Schrottwert sei Null. Die Maschine werde am Beginn des ersten Jahres (Zeitpunkt t_0) bezahlt.

Der Kapitalwert beträgt demnach

$$\frac{50000}{1,05} + \frac{55000}{1,05^2} + \frac{60000}{1,05^3} - 120000 \approx 29335 \text{ DM} .$$

Für die Berechnung der Annuitäten wird der am Zeitpunkt t_0 zu zahlende Anschaffungspreis in drei gleiche Raten umgerechnet, wie sie am Ende des ersten, des zweiten und des dritten Jahres zu zahlen wären;

$$\frac{120\ 000 \cdot 1,05^3 (1,05-1)}{1,05^3 - 1} \approx 44\ 445.- \text{ DM}$$

Auch die Einnahmen werden über ihren Barwert in gleichhohe Beträge umgerechnet:

$$\frac{50\ 000}{1,05} + \frac{55\ 000}{1,05^2} + \frac{60\ 000}{1,05^3} \approx 150\ 000 ;$$

$$\frac{150\ 000 \cdot 1,05^3 (1,05-1)}{1,05^3 - 1} \approx 55555.- \text{ DM}$$

Der interne Zinsfuß wird ermittelt aus:

$$120\ 000 = 50\ 000 q^{-1} + 55\ 000 q^{-2} + 60\ 000 q^{-3}.$$

Er beträgt ca. 20 %.

Wie sind diese Verfahren im Hinblick auf unsere Problemstellung zu beurteilen? Wir greifen als Beispiel die Diskontierungsmethode heraus. Es ist der Kapitalwert

$$(7) \quad K = (Ei)'_1 + \dots (Ei)'_n - A'_1 - \dots - A'_n$$

$$(Ei)'_1 = \frac{(Ei)_1}{q^{i-1}}$$

$$A'_1 = \frac{A_1}{q^{i-1}}$$

$$(i = 1, 2 \dots n)$$

- x_{ik} : Absatzmenge des Produkts i in der Periode k ,
 e_{ik} : Stückerlös des Produkts i in der Periode k ,
 $e_{ik}^i = \frac{1}{q_i} \cdot e_{ik}$,
 p_{jk} : Preis der Leistungseinheit des Faktors j in der Periode k ,
 $p_{jk}^i = \frac{1}{q_i} \cdot p_{jk}$,
 v_{jk} : Menge der in k verbrauchten Leistungseinheiten des Faktors j ,
 k_{ik} : proportionale Kosten pro Einheit des Produkts i in der Periode k ,
 $K_f^{(k)}$: Fixkosten der Periode k ,
 $d_{ik} = e_{ik} - k_{ik}$ $\Delta K_f^{(k)} = K_f^{(k)} - \widetilde{K}_f$.

Wenn $\tilde{x}$ die zu $\tilde{v}$ gehörige optimale Produktkombination ist und wenn die Kapazitäten b_{mk} zugefügt werden, dann sind die aus der Umformung von (7) gewonnene rechte Gleichungsseite von (9) und die unser Problem darstellenden rechten Gleichungsseiten von S. 10 ff. formal gleich ¹⁾.

Der Unterschied besteht darin, daß bei den Verfahren von Lutz ²⁾ und Schneider jeweils nur ein Projekt untersucht wird, während unser Problem verlangt, daß alle in Frage kommenden Projekte gleichzeitig in der Rechnung erfaßt werden. Außerdem sind die Produktmengen x_{ik} nicht eindeutig bestimmt, da es sich, im Gegensatz zu unserem Problem, bei (9) nicht um eine Maximierungsaufgabe handelt. Das Fehlen der Maximumforderung bedeutet aber den Verzicht auf Fixierung der optimalen Produktkombination. Diese könnte unter Verhältnissen, wie sie unserem Problem zugrundeliegen, auch gar nicht errechnet werden. In der Differentialrechnung wird eine Funktion unter Nebenbedingungen mit

1) Vgl. auch die Transformierung der Indizes auf S. 43

2) Das Verfahren von Lutz wird nicht gesondert dargestellt, weil es gegenüber dem Verfahren Schneiders keine Unterschiede aufweist.

Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren maximiert ¹⁾.

Voraussetzung ist allerdings, daß die Nebenbedingungen Gleichungsform aufweisen. Beim Auftreten von Ungleichungen bleibt die Möglichkeit zu dem Versuch, den Lösungsraum systematisch einzugrenzen. Ob das mit einem vertretbaren Zeitaufwand gelingt, hängt von der Struktur und dem Umfang des Problems ab.

Der Umstand, daß die optimale Produktkombination praktisch nicht errechnet werden kann, beeinträchtigt den Wert der Verfahren von Lutz und Schneider ²⁾. Die Beurteilung eines Projekts, die sich auf irgendein mögliches Produktionsprogramm stützt, besitzt nur begrenzten Erkenntniswert.

Viel wichtiger für den Investor ist es, die Auswirkung der Investition zu kennen, die sich einstellt, wenn das Projekt zusammen mit den vorhandenen Anlagen optimal genutzt wird ³⁾.

IV. Das Verfahren Terborghs

Wie Schindler, der die grundlegenden Gedanken ⁴⁾ Terborghs in deutscher Sprache publiziert hat ⁵⁾, betont, war es das Ziel

-
- 1) Bei einer größeren Zahl von Nebenbedingungen und/oder einer größeren Zahl von Variablen kann diese Methode erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Vgl. Churchman, C.W., Ackow, R.D., Arnoff, E.L.: Introduction to Operations Research, New York 1957, S. 273.
 - 2) "Es ist nicht so, daß die Investitionsplanung (als ein Teil der Produktionsplanung) gewissermaßen eine Folge der Programmplanung sei, derart, daß die zu fabrizierenden Produktmengen vor Aufstellung der Investitionspläne gegeben seien." (Gutenberg, Erich: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Band I, 4. Auflage, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958, S. 129).
 - 3) Es soll unter "optimal" "im übrigen optimal" verstanden werden, das heißt, es soll dem Investor erlaubt sein, einzelne Parameter als gegeben anzusehen. Der Grenzfall, daß alle Parameter als Konstante betrachtet werden, bleibt ausgeschlossen, weil es in diesem Fall kein Optimalprogramm gibt.
 - 4) Vgl. Terborgh, George: Dynamic Equipment Policy, New York - Toronto - London 1949.
 - 5) Vgl. Schindler, Heinz: Investitionsrechnungen auf der Basis neuer theoretischer Erkenntnisse, in: "Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung", Neue Folge, 8.Jg., Köln und Opladen 1956, S. 462 ff.; derselbe: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, Meisenheim, 1958.

Terborghs, "den Unternehmern ein brauchbares Instrument in die Hand zu geben, mit dem sie ihre Entscheidungen verbessern können." ¹⁾

Charakteristisch für Terborgh ist, daß er versucht, den zukünftigen technischen Fortschritt zu berücksichtigen: "For the current challenger can make good its claim to succeed the defender only when is no future challenger worth waiting for" ²⁾. Dazu benützt er folgende Größen:

1) Leistungsnachteil:

Der Leistungsnachteil ³⁾ setzt sich zusammen aus dem Verschleiß, das ist der Rückgang der betrieblichen Leistung gegenüber einer neuen gleichen Maschine durch höhere Kosten oder geringeren Ertrag, und der Veralterung, ausgedrückt durch den Betrag, um den die Kosten oder der Ertrag der neuen Maschine gleichen Typs von den entsprechenden Größen der besten Ersatzmaschine abweichen. Die beste Ersatzmaschine ist die beste für einen bestimmten Produktionsvorgang im jeweils betrachteten Zeitpunkt erhältliche Maschine.

Der angestellte Vergleich ist immer zweistufig: Es ist zum Beispiel der Leistungsnachteil der besten Ersatzmaschine jetzt (Zeitpunkt t_0) Null, während er sich nach dem Verlauf eines Jahres (Zeitpunkt t_1) aus dem Vergleich mit einem neuen Exemplar der besten Ersatzmaschine des Zeitpunktes t_0 und der im Zeitpunkt t_1 vorhandenen besten Ersatzmaschine errechnet;

2) Leistungsabnahme:

Die Leistungsabnahme ist die Zunahme des Leistungsnachteils pro Zeiteinheit;

3) Minimaler durchschnittlicher Verfahrensnachteil:

Der Betrag, durch den der Leistungsnachteil einer Maschine ausgedrückt wird, ist eine Funktion der Zeit. Er wird mit Ausdehnung des Zeitraumes, der betrachtet wird, wachsen.

Nach Terborgh sollen die Zukunftsgrößen in gleich große Be-

1) Schindler, Heinz: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, S. 46.

2) Terborgh, George: Dynamic Equipment Policy, S. 55.

3) Es werden die Übersetzungen Schindlers verwendet, vgl. Schindler, Heinz: Investitionsrechnungen auf der Basis neuer theoretischer Erkenntnisse, a.a.O., S. 462 ff.

träge umgeformt werden. Ist zum Beispiel der Leistungsnachteil am Ende des ersten Jahres 10 Geldeinheiten (GE), und ist die Leistungsabnahme ebenfalls 10 GE, dann ist für $p = 5\%$ und einen Zeitraum von drei Jahren der Barwert $w = \frac{10}{1,05} + \frac{20}{1,05^2} + \frac{30}{1,05^3} = 53,5$ und der durchschnittliche

Leistungsnachteil $l = 19,8$ ¹⁾.

Für einen Zeitraum von vier Jahren ist der durchschnittliche Leistungsnachteil 24,2. Addiert man zu dem durchschnittlichen Leistungsnachteil die als Annuität errechneten Kapitalkosten pro Jahr, bestehend aus Abschreibungen und Zinsen ²⁾, dann erhält man den durchschnittlichen Verfahrensnachteil. Da die eine Komponente, der Leistungsnachteil, mit Ausdehnung des Zeitraumes wächst, während die zweite Komponente, die Kapitalkosten, abnimmt, muß es einen Zeitwert geben, für den die Summe beider Komponenten ein Minimum ist. Das ist der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil.

Teils zur Vereinfachung, teils um die Rechnung durchführen zu können, macht Terborgh einige Annahmen:

1. Alle zukünftigen besten Ersatzmaschinen für eine Anlage haben den gleichen minimalen durchschnittlichen Verfahrensnachteil wie die erste beste Ersatzmaschine ³⁾.
2. Die betrachtete Investition wird unendlich oft wiederholt ⁴⁾.
3. Die Leistungsabnahme für alle zukünftigen Zeiteinheiten ist konstant ⁵⁾.
4. Jede zu ersetzende Maschine hat die Lebensdauer, die zu einem minimalen durchschnittlichen Verfahrensnachteil führt, bereits überschritten. Jede Verlängerung der Lebensdauer führt zu einer Erhöhung des durchschnittlichen Verfahrensnachteils.

$$1) l = w \frac{q(q-1)}{q-1} = 53,5 \frac{1,157(1,05-1)}{1,157-1} = 19,8$$

2) Der Betrag der Annuität ist bei einem Anschaffungspreis von 100 für 3 Jahre 36,7 und für 4 Jahre 28,2.

3) Terborgh, George: Dynamic Equipment Policy, S. 64.

4) Ebenda, S. 75 Anmerkung 1.

5) Ebenda, S. 65.

nachteils, da der Leistungsnachteil schneller wächst als die Kapitalkosten abnehmen¹⁾).

5. Die jährlichen Wertminderungen bilden eine fallende geometrische Reihe²⁾.

Als Kriterium für die Ersetzung einer Maschine sieht Terborgh den minimalen durchschnittlichen Verfahrensnachteil an³⁾. Ist er bei der zu ersetzenden Maschine größer als bei der besten Ersatzmaschine, soll sie ersetzt werden. Andernfalls soll der Ersatz unterbleiben. Für den Fall einer Neuinvestition soll gelten:

Die geplante Investition ist dann günstig, wenn der nächstjährige Bruttogewinnzuwachs, der durch Anschaffung und Inbetriebnahme erwartet wird, größer ist als der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil der neuen Maschine⁴⁾.

Soweit die Grundkonzeption Terborghs. Sie liegt auch seinem Buch "Business Investment Policy"⁵⁾ zugrunde.

"... die neue Formel stellt keineswegs eine Abkehr von der alten dar. Sie ist eine Umformulierung der gleichen Grundprinzipien, wie sie in Dynamic Equipment Policy entwickelt wurden, mit erweiterten und verbesserten Anwendungsmöglichkeiten ..." ⁶⁾. Terborgh unterscheidet zwischen absolutem und relativem Ertrag einer Investition. "Der absolute Ertrag hängt von dem Überschuß des Ertrages des Projekts über die von ihm verursachten Betriebs- und Instandhaltungskosten ab

Der relative Ertrag hängt ab von dem Unterschied (hinsichtlich Erträge und Betriebs- und Instandhaltungskosten) zwischen der

1) Terborgh, George: Dynamic Equipment Policy, S. 120.

2) Terborgh, George: MAPI Replacement Manual, Chicago 1950, S.71, zitiert bei Schindler, Heinz: Investitionsrechnungen auf der Basis neuer theoretischer Erkenntnisse, S.480.

3) Terborgh, George: Dynamic Equipment Policy, S.76, S.87 ff.

4) Ebenda, S. 131.

5) Terborgh, George: Business Investment Policy, Washington 1958.

6) Ebenda, Foreword S. IX -.

Situation mit dem Projekt und der Situation ohne das Projekt, betrachtet für einen bestimmten Zeitraum" ¹⁾).

Zur Erläuterung bringt Terborgh folgendes Beispiel: ²⁾

Die Anschaffungskosten einer Maschine betragen ca. 38550.-DM. Die Lebensdauer ist auf 10 Jahre geschätzt. Die Betriebs- und Instandhaltungskosten betragen im 1. Jahr 40 000.-DM und steigen jährlich um 1000.-DM bis auf 49 000.-DM im 10. Jahr. Es wird ein Ertrag von jährlich 50.000.-DM erzielt. Der Bruttogewinn beträgt dann im 1. Jahr 10 000.-DM und fällt jährlich um 1000.-DM bis auf 1000.-DM im 10. Jahr. Die Rate des absoluten Ertrages ist dann 10 %, denn

$$\frac{10000}{1,1} + \frac{9000}{1,1^2} + \frac{8000}{1,1^3} + \dots + \frac{1000}{1,1^{10}} \approx 38\ 550.$$

Wenn die Maschine nicht angeschafft wird, sind die Betriebs- und Instandhaltungskosten im nächsten ^{Jahr} 50 000.-DM und steigen jährlich um 1000.-DM. Der Ertrag soll unverändert 50 000.-DM bleiben. Der relative Ertrag folgt dann aus dem Unterschied in den Betriebs- und Instandhaltungskosten mit der neuen und ohne die neue Maschine. Dieser Unterschied beträgt in jedem Jahr gleichbleibend 10 000.-DM. Für einen Zeitraum von 10 Jahren folgt eine Rate des relativen Ertrages von 22,5 %, denn

$$\frac{10000}{1,225} + \frac{10000}{1,225^2} + \frac{10000}{1,225^3} + \dots + \frac{10000}{1,225^{10}} \approx 38550.$$

Terborgh hat die Schwierigkeiten bei der Ermittlung des absoluten Ertrages, der dem internen Zinsfuß Schneiders entspricht, erkannt: "Since it is impossible in most cases to compute their separate revenue generation and operating - cost incurment after (hervorgeh.b.Terb.) they are in service, it is even more impossible to predict these magnitudes before the projects are acquired" ³⁾. Terborgh schlägt deshalb vor, die Dringlichkeit einer Investition am relativen Ertrag zu messen. Als Vergleichsperiode soll ein Jahr gewählt werden, und zwar deshalb, weil für die

1) Terborgh, George: Business Investment Policy, Washington 1958, S. 39.

2) Vgl. ebenda, S. 44 ff.

3) Ebenda, a.a.O., S. 52.

meisten Investitionen jede längere Periode einen größeren relativen Ertrag bringt. Zudem ist die Durchführung der Investition nach einem Jahr in vielen Fällen die zweckmäßigste Alternative zur sofortigen Durchführung. Terborgh will die Rate des relativen Ertrages aus fünf Größen berechnen. Sie lauten:

1. Nettoinvestition; das ist der Investitionsbetrag des Projekts abzüglich des Betrages von Investitionen, die bei Nichtdurchführung des Projekts nötig werden;
2. der zusätzliche Einnahmeüberschuß, der dem Einsatz des Projekts entspringt;
3. die bei Durchführung der Investition sich ergebende Differenz im Kapitalverbrauch des nächsten Jahres;
4. der bei Durchführung der Investition unmittelbar verursachte Kapitalverbrauch des nächsten Jahres;
5. der zusätzliche Steuerbetrag.

Die Ertragsrate wird berechnet aus:

$$\frac{(2.) + (3.) - (4.) - (5.)}{(1.)} \cdot 100.$$

Nach Terborgh ¹⁾ liegt die Hauptschwierigkeit bei der Bereitstellung der Größe (4.), weil zu ihrer Bestimmung langfristige Voraussagen erforderlich sind.

Der Kapitalverbrauch eines Jahres ist die Abnahme des Kapitalwertes des Projekts während dieses Jahres oder der Gegenwartswert des Betrages, der während des Jahres für Tilgung und Verzinsung zur Verfügung steht. Nach Terborgh soll dieser Betrag identisch sein mit dem absoluten jährlichen Ertrag der Investition ²⁾. "Thus we confront an apparently insoluble dilemma: we must have the absolute-earnings estimates, but they are unavailable" ³⁾.

Zu den absoluten jährlichen Erträgen aus einer Anlage schreibt

1) Terborgh, George: Business Investment Policy, S. 64.

2) Ebenda, S. 67.

3) Ebenda, S. 67.

Terborgh: "They are what it (die Anlage, d. Verf.) can make in competition with other assets. Stated otherwise, they are what its successive annual services are worth to the owner (before income tax) as against their best current alternative" ¹⁾.
Damit ist die Verbindung zu der Konzeption in "Dynamic Equipment Policy" hergestellt.

Da über die Abhängigkeit der jährlichen Erträge von der Zeit keine genauen Aussagen gemacht werden können, fragt Terborgh nach der wahrscheinlichen Gestalt dieser Funktion. Fest steht, daß sie bei verschleißbaren Anlagegegenständen mit Ausdehnung der Zeit abnehmen wird. Die Abnahmerate eines Zeitabschnittes hängt von dem Ausmaß des Verschleißes und von dem Fortschreiten der Veralterung während des Zeitabschnittes ab. Terborgh läßt die Wahl zwischen drei verschiedenen Abnahmeverläufen. Das Modell, dem eine konstante Abnahmerate zugrunde gelegt ist, bezeichnet er als "Standard". Dieses Modell verwandte Terborgh schon für seine Ausführungen in Dynamic Equipment Policy. Die beiden neu hinzukommenden Modelle bezeichnet er als Variant A und Variant B. Für jedes der Modelle stellt er eine Diagrammtafel bereit, aus der für eine geschätzte Lebensdauer, für einen geschätzten Restwert und für das verwendete Abschreibungsverfahren der Kapitalverbrauch in % des Investitionsbetrages abgelesen werden kann. Zusammen mit den Größen (1.), (2.), (3.) und (5.) wird dann aus

$$\frac{(2.) + (3.) - (4.) - (5.)}{(1.)} \cdot 100$$

der Dringlichkeitsgrad der Investition errechnet.

Was leistet das Verfahren Terborghs für die Lösung unseres Problems? Terborgh beurteilt ein Projekt nach

$$T = [(2.) + (3.) - (4.) - (5.)] \frac{100}{(1.)} \quad (10)$$

Wenn ohne Investition im nächsten Jahr mit der Faktorkombination $\bar{v}$ die Produktkombination $\bar{x}$ hergestellt würde, so würde der Gewinn

1) Terborgh, George: Business Investment Policy, S. 68.

$$G = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i e_i - \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j p_j$$

$$= \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i d_i - Kf \quad \text{erzielt werden; dann}$$

kann für den Fall, daß das Projekt $\overline{v_{n+1}}$ berechnet werden soll, der Klammerinhalt von (10) durch

$$G'_{\overline{v_{n+1}}} = \sum_{i=1}^m (x_i - \tilde{x}_i) e_i + \sum_{l=m+1}^r x_l e_l - \sum_{j=1}^n (v_j - \tilde{v}_j) p_j -$$

$$v_{n+1} p_{n+1} - \sum_{k=n+2}^s v_k p_k \quad \text{ausgedrückt werden.}$$

Terborgh verwendet als Vergleichsbasis die Plandaten für das nächste Jahr. In unserem Problem bilden alle für eine Berechnung geeigneten Daten die Vergleichsgrundlage, wobei unterstellt wird, daß ein Investor eine Investition erst dann ins Auge faßt, wenn im Rahmen der besonderen Bedingungen des Investors von den betrieblichen Möglichkeiten optimaler Gebrauch gemacht wird. Unser Problem erfordert auch - anders als bei Terborgh - die gleichzeitige Berücksichtigung aller konkurrierenden Projekte, wobei - wieder anders als bei Terborgh - optimaler Gebrauch aller Anlagen, das heißt der vorhandenen und der schließlich zur Anschaffung ausgewählten, unterstellt wird.

Es ist ein großes Verdienst von Terborgh, daß er seine Bemühungen, die Investitionsanalyse zu verbessern, an dem Punkt ansetzt, an dem praktische Investitionsrechnungen bisher meist scheiterten: an der Bereitstellung der Daten. Seine theoretischen Ausführungen zeigen, daß er sich bemüht, die Unsicherheit von Zukunftsgrößen zu beseitigen, indem er Annahmen macht, die auf Durchschnittswerte gestützt sind ¹⁾.

Bei dem Versuch, mit Hilfe des neuen MAPI-Systems ²⁾ das Daten-

1) Vgl. Albach, Horst: Investitionspolitik in Theorie und Praxis, in: "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", 28. Jg., Wiesbaden 1958, S. 766 ff.

2) MAPI ist die Abkürzung für Machinery and Allied Products Institute, in dessen Auftrag Terborgh arbeitete.

problem zu meistern, sieht Terborgh nur eine Seite dieses Problems. Die Unsicherheit der Daten beruht nicht nur darauf, daß es sich um Zukunftsgrößen handelt, sondern hat ihre Ursache auch in der Komplexität des zu betrachtenden Sachverhalts.

Der relative Ertrag durch den "mit-und-ohne" Vergleich bringt nicht nur - wie Terborgh schreibt - die schwierige Aufgabe, den Kapitalverbrauch des Investitionsprojektes zu bestimmen. Mindestens die gleiche Schwierigkeit bereitet die Bestimmung einer zweiten Größe, die Terborgh operating advantage nennt (vgl. Position 2 auf S.32). Er versteht unter diesem Begriff den Betrag, der aus allen durch die Investition verursachten, direkten und indirekten Einwirkungen auf Einnahmen und Ausgaben pro Zeiteinheit resultiert ¹⁾.

Da hierbei nicht von der optimalen Produktkombination ausgegangen werden kann (vgl. S. 26 f.), erfüllt das Verfahren von Terborgh die Forderung "the main object of business investment analysis is to help management place the capital funds of the company where they will do the most good" ²⁾ für die von uns unterstellten Bedingungen nicht.

V. Investitionsrechnungen in einer geplanten Wirtschaft

In einer Wirtschaftsordnung, in der der Entscheidungsbereich des Einzelnen durch ein System normativer Plangrößen eingeschränkt wird, ist das Vorhandensein leistungsfähiger Rechenverfahren von überragender Bedeutung. Mögen in einer Marktwirtschaft die Investitionsentscheidungen des einzelnen Investors noch so mangelhaft fundiert sein, die der Gesamtwirtschaft daraus entstehenden Verluste werden durch den Marktmechanismus begrenzt. Dieser Mechanismus arbeitet um so wirkungsvoller, je besser die einzelnen Preise ihre Funktion als Knappheitsmesser erfüllen können. In einem Wirtschaftssystem, in dem die Preise durch eine Zentralbehörde festgelegt werden, ist dieser Mechanismus zerstört und muß durch eine gesamtwirtschaftliche Pla-

1) Terborgh, George: Investment Policy, S.90 ff.

2) " " : " " , S.39.

nungsrechnung ersetzt werden. Wir wollen uns mit den Lösungsmöglichkeiten dieser gigantischen Aufgabe nicht näher befassen, sondern uns der Frage zuwenden, welche Verfahren für die bescheidenere Aufgabe der einzelwirtschaftlichen Investitionsrechnung zur Verfügung stehen. Dabei wollen wir die Situation in Mitteldeutschland zugrundelegen. Dort stehen die Betriebsleitungen der volkseigenen Betriebe bei denjenigen Investitionen, die nicht zentral angeordnet werden, vor der gleichen Aufgabe wie ein Investor in der Marktwirtschaft. Da die erwirtschafteten Gewinne nicht in voller Höhe abgeführt zu werden brauchen, haben die Betriebe ein Interesse an der Maximierung des Investitionsgewinnes. Die Mehrzahl der mitteldeutschen Autoren, die sich mit dem Nutzeffekt von Investitionen befassen, vermischt einzel- und gesamtwirtschaftliche Gesichtspunkte. Aus all diesen sehr allgemein gehaltenen Ausführungen ist über Rechenmethoden nichts zu erfahren. Als Beispiel kann Scholl gelten, der sich mit der (einer Investitionsrechnung vorzuschaltenden) Ermittlung der Produktionskapazität befaßt ¹⁾. "Die voneinander abhängigen Produktionsabteilungen der meisten Industriebetriebe der Deutschen Demokratischen Republik haben eine unterschiedliche Durchlaßfähigkeit, das heißt, die Betriebe weisen noch Disproportionen auf. Da durch die Ermittlung der Produktionskapazität der Umfang der Engpässe klar erkannt wird, können durch zweckmäßige Investitionen in diesen Betriebsabschnitten die Disproportionen des Betriebes so ausgeglichen werden, daß die bisher brachliegenden Produktionskapazitäten der anderen Betriebsabschnitte mit in die Produktion eingeschaltet werden und die Produktion des gesamten (gesp. b. Scholl) Betriebes steigt. Deshalb ist eine umfassende Kapazitätsermittlung eine wichtige Voraussetzung zur Erzielung eines höchsten Nutzeffektes ..." ²⁾. Den folgenden Ausführungen Scholls kann man entnehmen, daß er dem Begriff Produktionskapazität einen völlig neuen Inhalt gibt. Und zwar versteht er

1) Vgl. Scholl, Gerhard: Die Ermittlung der Produktionskapazität und der Kapazitätsausnützung in den volkseigenen Industriebetrieben der DDR, Diss. Berlin 1955, Hochschule für Ökonomie und Planung.

2) Ebenda, S. 10 f.

darunter eine zukünftige Produktionsmöglichkeit, die sich ergibt unter Berücksichtigung des ständig steigenden politischen Bewußtseins der Arbeiterklasse unter Führung der Aktivisten und aus der Berücksichtigung der Reserven, die in den gegenwärtigen betrieblichen Disproportionen liegen. Ferner sollen zugrunde gelegt werden die "zweckmäßigsten technologischen Prozesse", die "größtmögliche zeitliche Ausnützung der Ausrüstung" und eine "Nomenklatur des Produktionssortiments, die abgestimmt ist auf die Bedürfnisse der Gesellschaft" ¹⁾. Daneben arbeitet Scholl noch mit "der möglichen Ausnützung der Produktionskapazität" ²⁾, unter der er die größtmögliche Leistungsfähigkeit des Betriebes im kommenden Planjahr versteht. Scholl setzt sich im Zusammenhang mit der Bestimmung des Begriffes Produktionskapazität unter anderem mit Mellerowicz und Kalveram auseinander. Wir wollen darauf jedoch nicht eingehen ³⁾, sondern uns der Kernfrage zuwenden, wie Scholl die erforderlichen Größen zu ermitteln denkt. "Die Gesamtmenge an Produkten, aufgeschlüsselt auf ein gegebenes Sortiment, die unter den gegenwärtig bekannten günstigsten Bedingungen (die aus dem Begriff der Produktionskapazität hervorgehen) in einer Abteilung produziert werden können, das ist der Ausdruck für die Größe der Produktionskapazität in dem betreffenden Betriebsabschnitt" ⁴⁾. Zu der Bestimmung des als gegeben einzuführenden Sortiments fordert Scholl "nicht ein optimales Sortiment, sondern ein solches Sortiment zugrunde zu legen, das den Bedürfnissen der Volkswirtschaft entspricht" ⁵⁾. Darüber, wie dieses Sortiment zu bestimmen ist, erfahren wir bei Scholl nichts. Dabei ist diese Frage auch unter planwirtschaftlichen Verhältnissen von Bedeutung, denn ein Teil der staatlichen Produktionsbetriebe hat ja bei der Festlegung des

1) Vgl. ebenda, S. 21.

2) Ebenda, S. 29.

3) Die Lektüre der Stelle (S. 31 ff.), an der Mellerowicz völlige Unwissenschaftlichkeit vorgeworfen wird, gibt ein treffendes Bild vom Stande der Wirtschaftswissenschaft in Mitteleuropa.

4) Ebenda, S. 97.

5) Ebenda, S. 99.

Sortiments innerhalb verschieden weit gesteckter Grenzen freie Hand. Aufschlußreicher sind die Ausführungen, die Knauth in einer auf seiner Habilitationsschrift basierenden Arbeit zu diesem Problem macht ¹⁾. Knauth stellt zunächst fest, daß der ökonomische Nutzen einer Investition durch eine Rentabilitätsberechnung festgestellt werden kann, in der die Kosten nach realisierter Investition den Industrieabgabepreisen gegenübergestellt werden. Diese Rentabilitätsberechnung soll Teil eines betriebswirtschaftlichen Gutachtens sein, dem die "allseitige ökonomische Einordnung des Investitionsobjektes in den Gesamtbetrieb" ²⁾ zugrunde liegt und das unter anderem eine "Analyse der Bedarfsbefriedigung und der Absatzbedingungen" ³⁾ zum Inhalt hat.

Auch an anderer Stelle ⁴⁾ fordert Knauth, Faktoren wie Bedarf und Absatzmöglichkeiten zu berücksichtigen. Er unterstreicht die Notwendigkeit, die "groben Planvorstellungen der Leitungsorgane der Volkswirtschaft" zu ergänzen durch "betriebliche Planvorschläge ... , die der Bedarfsschichtung entsprechen" ⁵⁾. "Das Absatzproblem darf nicht als letztrangig betrachtet werden" ⁶⁾. Auf die Frage, wie das im konkreten Fall rechentechnisch zu geschehen hätte, findet man jedoch keine Antwort. In seinen Beispielen für Rentabilitätsberechnungen ⁷⁾ unterstellt Knauth stets ein gegebenes Produktionsprogramm und sagt nichts, wie die Rentabilität zu berechnen ist, wenn unter Berücksichtigung der Kosten und Absatzpreise der Betriebsleistungen und unter Berücksichtigung der Kapazitäten der Betriebsteile das Maximum angestrebt wird. Bezeichnend ist, wenn Knauth für den Vergleich mehrerer Investitionsprojekte schreibt:

1) Vgl. Knauth, Erhard: Ökonomischer Nutzen und Finanzierung von Investitionen in der volkseigenen Industrie, Berlin 1958.

2) Knauth, Erhard: a.a.O., S. 142 f.

3) Ebenda, S. 142.

4) Ebenda, S. 141.

5) Ebenda, S. 116.

6) Ebenda, S. 89 ff.

7) Ebenda, S. 89 ff.

"Lösungen können in verallgemeinerter Form nicht gegeben werden" ¹⁾:

Knauthe schreibt weiter: "Es besteht noch keine Klarheit darüber mit Hilfe welcher Methoden der ökonomische Nutzen im einzelnen bestimmt werden soll" ²⁾.

Im Anschluß an eine Besprechung der Rentabilitätsberechnungen unter den Bedingungen "der kapitalistischen Produktionsweise" stellt Knauthe fest, daß "bestimmte methodische Erfahrungen der Arbeit mit Rentabilitätsberechnungen durchaus auf die volkseigene Wirtschaft übertragen werden können" ³⁾.

Man darf aus diesen Feststellungen Knauthes folgern, daß für die Investitionsrechnungen volkseigener Betriebe leistungsfähigere als die traditionellen Verfahren nicht zur Verfügung stehen.

1) Knauthe, Erhard: a.a.O., S. 151.

2) Ebenda, S. 34.

3) Ebenda, S. 84.

Teil 2

VI. Der Begriff "Linear Programming"

"Unter der linearen Programmierung versteht man eine mathematische Theorie zur Bestimmung des Maximums oder Minimums eines linearen Ausdrucks, wobei die Veränderungen der in diesen Ausdruck eingehenden Variablen dadurch begrenzt werden, daß gewisse Ungleichungen erfüllt sein sollen" ^{1) 2)}.

Diese Begriffsbestimmung soll durch einen Vergleich des Linear Programming mit der traditionellen Grenzanalyse verdeutlicht werden. Für die traditionelle Grenzanalyse ist es typisch, daß etwas maximiert oder minimiert wird unter einer einzigen Bedingung. So wird zum Beispiel im allgemeinen der Gewinn maximiert unter der (einzigen) Bedingung einer gegebenen Produktionsfunktion, oder es werden die Kosten minimiert unter der (einzigen) Bedingung, ein bestimmtes Leistungsquantum zu erbringen ³⁾. In vielen praktischen Fällen kann es jedoch nötig sein, mehr als eine einschränkende Bedingung zu beachten. Als Beispiel dient ein Mehrproduktartbetrieb. Bei der Errechnung des gewinnmaximalen Produktionsprogrammes ist es nötig, neben der Gewinnfunktion die Kapazitäten der Produktiveinheiten zu berücksichtigen. Bei Herstellung der gewinnmaximalen Produktmengen brauchen

1) Paulsson Frenchner, T.: Betriebswirtschaftslehre und Verfahrensforschung - Operations Research, in "Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung", neue Folge, 9. Jg., Köln und Opladen 1959, S. 80.

2) Außer den an anderer Stelle zitierten Quellen vgl. auch die deutschsprachigen Publikationen: Krelle, Wilhelm; Künzi, Hans Paul: Lineare Programmierung, Zürich 1958; Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme - Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gesellschaft, Nr. 9, Würzburg 1959. Mit praktischen Möglichkeiten haben sich unter anderem Munz und Winkel befaßt. Vgl. die Beiträge der beiden Autoren in "Kostenrechnungspraxis, Zeitschrift für Betriebsabrechnung, Kostenrechnung und Planung", Wiesbaden 1959, Nr. 3, Nr. 4 und "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", Wiesbaden 1959, Nr. 5, Nr. 6.
Zu den mathematischen Grundlagen des Linear Programming vgl. insbesondere Charnes, A., Cooper, W.W., Henderson, A.: An Introduction to Linear Programming, New York 1953; Allen, R.G.D.: Mathematical Economics, London 1956; Dorfman, R., Samuelson, P.A., Solow, R.: Linear Programming and Economic Analysis, New York - Toronto - London 1958.

3) Vgl. Dorfman, R., Samuelson, P.A., Solow, R.: a.a.O., S. 16.

nicht alle Kapazitäten voll ausgenutzt zu sein. Das heißt, es können neben Bedingungen in der Form:

Kapazität eines Produktionsfaktors gleich Summe aller bei der Herstellung des Produktionsprogrammes verbrauchten Leistungseinheiten des Produktionsfaktors

auch Bedingungen der Form:

Kapazität eines Produktionsfaktors größer als Summe aller bei der Herstellung des Produktionsprogrammes verbrauchten Leistungseinheiten des Produktionsfaktors

auftreten.

Die Bedingungen können also nicht mehr allgemein in Form einer Gleichung ausgedrückt werden, sondern es können auch Ungleichungen auftreten. Damit werden aber die bisherigen Methoden unbrauchbar. Es werden neue Verfahren benötigt, sobald Probleme bearbeitet werden, bei denen eine Optimalentscheidung zu treffen ist, die einer Anzahl unterschiedlicher Bedingungen unterliegt¹⁾. Ein weiterer Unterschied zwischen den traditionellen Verfahren und Linear Programming beruht darauf, daß bei den traditionellen Verfahren die Faktor- und Produktmengen einzeln unendlich kleinen Variationen unterworfen werden können²⁾. Durch die Annahme beliebig kleiner Faktoränderungen entstehen unendlich viele mögliche Faktorkombinationen. Bei Linear Programming wird dagegen angenommen, daß der Entscheidungsbereich des Unternehmers begrenzt ist (je langfristiger die Betrachtung, um so mehr erweitern sich diese Grenzen) und er nur die Wahl zwischen einer endlichen Anzahl von Faktorkombinationen hat. "Linear Programming entsteht mit Produktionsbedingungen, wie sie der Einsatz maschineller Einrichtungen mit sich bringt"³⁾. Jede dieser Faktorkombinationen ist durch ein bestimmtes Verhältnis der Faktormengen zueinander gekennzeichnet. Man bezeichnet eine solche Kombination als Prozeß oder Tätigkeit. Jede Tätigkeit kann auf verschieden hohem Niveau benutzt werden⁴⁾. Das Augenmerk bei Linear Program-

1) Vgl. ebenda, S. 27.

2) Vgl. ebenda, S. 141.

3) Ebenda, S. 141.

4) Als Niveau bezeichnet man den Umfang einer Tätigkeit gemessen in einer zweckmäßigen Maßeinheit. So wird man als Maßeinheit für die Tätigkeit "Herstellung des Produkts A" die Mengeneinheit des Produkts A verwenden.

ming richtet sich nicht direkt auf die Faktormengen, sondern auf die Niveaus der einzelnen Prozesse. Es ist möglich, daß einige Prozesse überhaupt nicht benutzt werden, also das Niveau Null aufweisen. "Diese Etwas-oder-Nichts Entscheidung ist aber oft die, auf die es ankommt ..."¹⁾.

Für die Beantwortung solcher Fragen sind aber die herkömmlichen Verfahren nicht geeignet.

Man kann den Unterschied zwischen Linear Programming und traditionellen Verfahren auch unter einem Blickpunkt sehen, der für Investitionsrechnungen besonders bedeutsam ist. In der Programming Konzeption sind die Mengen an fixen Produktionsfaktoren die zentralen Größen des Problems, weil sie den Handlungsspielraum bestimmen, während sie in der traditionellen Formulierung eine Nebenrolle spielen, gerade weil ihre Mengen festliegen²⁾.

Wie schon aus diesen kurzen Bemerkungen ersichtlich, existiert keineswegs ein Gegensatz zwischen Marginalanalyse und Linear-Programming. Linear-Programming ist Marginalanalyse, zugeschnitten auf den Fall eines beschränkten Entscheidungsbereiches³⁾.

Die Ausführungen zu dem Begriff Linear-Programming sollen damit beschlossen werden, daß der eingangs zitierten sehr allgemeinen Definition eine etwas konkreter gefaßte zur Seite gestellt wird: "Linear-Programming (LP) ist eine Technik, mit deren Hilfe bestimmt wird, wie beschränkt verfügbare Mittel oder Kapazitäten einer Unternehmung zu nutzen sind, damit ein bestimmtes Ziel wie niedrigste Kosten, maximaler Gewinn oder geringster Zeitaufwand erreicht wird, wobei für die Mittel alternative Verwendungsmöglichkeiten bestehen. Es ist eine Technik, die für bestimmte Bedingungen die Auswahl der optimalen Handlungsweise aus einer Anzahl möglicher Handlungsweisen systematisiert, wobei der Unternehmensleitung Informationen für eine wirkungsvollere Verwen-

1) Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R.: a.a.O., S. 27.

2) Vgl. ebenda, S. 202.

3) Vgl. ebenda, S. 133, Anm. 1; Schneider, Erich: Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 5. Aufl., Tübingen 1958, S. 157.

derung der zur Verfügung stehenden Mittel geliefert werden" ¹⁾.

VII. Das Ausgangsproblem: Die optimale Produktkombination

Bei unserer Problemstellung gingen wir von der Annahme aus, daß ein Investor eine Investition erst dann in Erwägung zieht, wenn die vorhandenen Möglichkeiten bereits optimal genutzt werden. Es soll daher zunächst geklärt werden, ob der Investor mit Hilfe des Linear Programming in der Lage ist, die optimale Produktkombination zu errechnen, um sie dann realisieren zu können ²⁾.

Ein Betrieb habe die Produktionsfunktion

$$F(x_1, x_2, x_3; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = 0.$$

Die Funktion F soll so sein, daß für die Herstellung des Produkts

$$x_1 \quad v_1^{(1)} : v_2^{(1)} : v_3^{(1)} : v_4^{(1)} = \text{constans } (1)$$

$$x_2 \quad v_1^{(2)} : v_2^{(2)} : v_3^{(2)} : v_4^{(2)} = \text{constans } (2)$$

$$x_3 \quad v_1^{(3)} : v_2^{(3)} : v_3^{(3)} : v_4^{(3)} = \text{constans } (3).$$

Bei dem Faktor V_5 sei der Verbrauch unabhängig von den Produktionsmengen. Je Produkt sollen die fixen Mengen $v_5^{(1)}$, $v_5^{(2)}$ und $v_5^{(3)}$ in Anspruch genommen werden. Der Gewinn G soll sein

$$\begin{aligned} G &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 - v_1 p_1 - v_2 p_2 - v_3 p_3 - v_4 p_4 - v_5 p_5 \\ &= x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 d_3 - K_f. \end{aligned}$$

1) Ferguson, Robert O., Sargent, Lauren F.: Linear Programming - Fundamentals and Applications, New York-Toronto-London 1958, S. 3.

2) "One source of improvement in operation of the business stems from the fact that LP can indicate how to make most effective use of existing facilities (gesp. b. Ferg./Sarg.). The word 'existing' is emphasized because frequently improvement is obtained without addition of equipment and people Then, after those possibilities are explored, it is possible to plan for more profitable operation through the addition ore purchase of new facilities and equipment by considering such possibilities in the calculation. In this way the profit making potential of new equipment can be computed in advance - before commitment to purchase is made" (vgl. Ferguson, Robert O., Sargent, Lauren F.: a.a.O., S. 13).

Die Produktionsfaktoren V_1 , V_2 und V_3 sollen während einer Rechnungsperiode die Leistungsmengen b_1 , b_2 und b_3 abgeben können, so daß gilt

$$v_1 \leq b_1$$

$$v_2 \leq b_2$$

$$v_3 \leq b_3 .$$

Außer der Ungleichung für V_5 fehlt auch die Ungleichung für den Faktor V_4 , da angenommen wird, daß V_4 für den Rechnungszeitraum als variabel gelten kann. Die Faktorproportionen für

$$\begin{array}{llll} 1 \text{ Mengeneinheit (ME) } X_1 & \text{seien} & a_{11}:a_{21}:a_{31}:a_{41} & \text{und } v_5^{(1)} \\ 1 & " & X_2 & " \quad a_{12}:a_{22}:a_{32}:a_{42} \text{ und } v_5^{(2)} \\ 1 & " & X_3 & " \quad a_{13}:a_{23}:a_{33}:a_{43} \text{ und } v_5^{(3)} . \end{array}$$

Die optimale Produktkombination ist erreicht, wenn

$$G = x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 d_3 - K_f = \text{Max!} \quad \text{unter den Bedingungen}$$

$$b_1 \geq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$b_2 \geq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$b_3 \geq a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (x_i \geq 0, i = 1, 2, 3)$$

Dazu folgendes Zahlenbeispiel:

Es wird von einem Betrieb ausgegangen, dessen technische Ausrüstung die Herstellung der Produkte A, B und C gestattet. Für die Produktion der drei Produkte existiert je ein Produktionsverfahren.

Es besteht starke Nachfrage nach allen drei Produkten, so daß von jedem Produkt mehr als bisher abgesetzt werden könnte. Die Mengen, die von den Produkten A, B und C in einem Monat hergestellt werden können, werden durch die Kapazität von drei Maschinen begrenzt. Diese Maschinen stehen während des Monats für je 200 Betriebsstunden zur Verfügung. Für die Herstellung einer Mengeneinheit (ME) des Gutes A werden benötigt eine halbe Betriebsstunde an Maschine I und zwei Betriebsstunden an Maschine II. Das Gut B durchläuft alle drei Maschinen und verbraucht pro ME

- 1 Betriebsstunde von Maschine I und
- 1 1/2 Betriebsstunden von Maschine II und
- 1/2 Betriebsstunde von Maschine III.

Für die Herstellung des Gutes C wird die Maschine II nicht gebraucht. 1 ME C verbraucht

- 2 Betriebsstunden an Maschine I und
- 1 Betriebsstunde an Maschine III.

Aus der Betriebsabrechnung ist bekannt, daß bei Herstellung einer ME des Gutes A variable Kosten in Höhe von DM 800.-- entstehen. 1 ME B verursacht variable Kosten in Höhe von DM 700.--. Die variablen Kosten für 1 ME C betragen DM 750.--. An Erlösen werden erzielt:

- für 1 ME A DM 1150.--,
- 1 ME B DM 950.-- und
- 1 ME-C DM 1050.--.

Der Betrieb sucht die Produktmengenkombination, die ihm bei den vorhandenen Produktionsmöglichkeiten einen maximalen Gewinn einbringt. Wenn mit x_1 die Anzahl der ME A, mit x_2 die Anzahl der ME B und mit x_3 die Anzahl der ME C bezeichnet werden, kann man folgende Beziehung aufstellen:

$$G = (1150 - 800)x_1 + (950 - 700)x_2 + (1050 - 750)x_3 - \text{fixe Kosten pro Monat.}$$

Auf die Höhe der fixen Kosten soll der Betrieb keinen Einfluß nehmen können. Die Höhe des Gewinns kann somit nur über die Variablen x_1 , x_2 und x_3 verändert werden. Die Aufgabe, den Gewinn zu maximieren, lautet dann:

$$G^{1)} = 350x_1 + 250x_2 + 300x_3 = \text{Max !}$$

Es dürfen jedoch nicht mehr als 200 Betriebsstunden pro Maschine verbraucht werden. Das heißt: G ist zu maximieren unter den einschränkenden Bedingungen, daß

1) Es wird der Kürze halber die Größe G Gewinn genannt, statt Überschuß der Erlöse über die variablen Kosten.

$$\begin{aligned} 200 &\leq 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 \\ 200 &\leq 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 \\ 200 &\leq 1,0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 \end{aligned}$$

Wenn mit x_4 die Anzahl der Betriebsstunden, die die Maschine I während des Monats ungenutzt bleibt ¹⁾, mit x_5 und x_6 die ungenutzten Betriebsstunden der Maschinen II und III während des gleichen Zeitraumes bezeichnet werden, dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} 200 &= 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ 200 &= 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 \\ 200 &= 0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 \end{aligned} \quad 2)$$

An der Funktion G ändert sich nichts, da die Nichtnutzung nichts zum Gewinn beiträgt.

Das Optimalprogramm kann mit Hilfe der sogenannten Simplex-Methode ³⁾ berechnet werden.

Dieses Lösungsverfahren macht von der Erkenntnis Gebrauch, daß - falls das Problem überhaupt lösbar ist - das gesuchte Maximum (oder Minimum) so viele Tätigkeiten mit positivem Niveau umfaßt, wie Gleichungen vorhanden sind.

Für unser Beispiel bedeutet das, daß der Betrieb bei optimaler Nutzung drei Tätigkeiten ausführen wird und daß drei Tätigkeiten das Niveau Null aufweisen werden. Der Lösungsvorgang der Simplex-Methode besteht darin, aus der endlichen Zahl möglicher

-
- 1) Der Wert für x_4 bestimmt das Niveau der (fiktiven) Tätigkeit 4 "Nichtnutzung der Maschine I". Als Maßeinheit für Tätigkeit 4 dient die Kapazitätseinheit, im vorliegenden Beispiel die Betriebsstunde. Entsprechendes gilt für x_5 und Maschine II bzw. x_6 und Maschine III.
 - 2) Aus der Definition der Tätigkeiten folgt die selbstverständliche Bedingung, daß die x_i nicht negativ sein dürfen.
 - 3) Vgl. Dantzig, G.B. in Koopmans, T.C.: Activity Analysis of Production and Allocation, New York 1951, S. 339 f. Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R.: a.a.O., S. 75 ff; weitere Lösungsmethoden S. 93 ff und bei Ferguson, R., Sargent, L.: a.a.O., S. 24 ff.

Lösungen eine herauszugreifen und zu prüfen, ob sie optimal ist. Ist sie das nicht, dann kann die Lösung dazu benutzt werden, eine zweite, verbesserte Lösung zu berechnen. Das wird wiederholt, bis die Optimallösung gefunden ist.

Die Zielfunktion und die Gleichungen unseres Beispiels lauteten:

$$G = 350x_1 + 250x_2 + 300x_3$$

$$200 = 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$200 = 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6$$

$$200 = 0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6$$

In diesem Fall ist eine Lösung, mit der die Rechnung begonnen werden kann, sofort zu erkennen ¹⁾. Sie lautet:

$$x_4 = 200, x_5 = 200, x_6 = 200, x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Für die Auswahl dieser - wirtschaftlich unsinnigen - Ausgangs-lösung war der mathematische Gesichtspunkt maßgebend:

Befriedigung der Gleichungen, wenn drei Variable größer als Null, die übrigen Variablen gleich Null sind.

Zur Erleichterung der Rechnung wird ein Simplex-Tableau angefertigt:

	0	1	2	3	4	5	6	Gesamt
1 x_4		0,5	1	2	1	0	0	200
2 x_5		2	1,5	0	0	1	0	200
3 x_6		0	0,5	1	0	0	1	200
4 g_j		350	250	300	0	0	0	
5 z_j		0	0	0	0	0	0	
6 $g_j - z_j$		350	250	300	0	0	0	

In die Spalten 1 - 6 (Zeile 1-3) werden die Koeffizienten der Gleichungen, geordnet nach den zugehörigen Variablen, eingesetzt.

1) Wenn das nicht möglich ist, vgl. die Verfahren für das Finden einer Ausgangslösung von Dantzig, G.B. in Koopmans, T.C.: a.a.O., S. 345 ff.; Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R.: a.a.O., S. 83; Künzi, H.P.: Die Simplexmethode zur Bestimmung einer Ausgangslösung bei bestimmten linearen Programmen, in: "Unternehmensforschung", Würzburg 1958, S. 60 ff; Waugh, F., Burrows, G.: A Short Cut to Linear Programming, in: "Econometrica", Chicago 1955, S. 18 ff.

In Spalte 2 stehen zum Beispiel die Koeffizienten von x_2 . In Zeile 4 wird der Gewinn g_j , der aus einer Einheit der Tätigkeit x_j erzielt wird, eingesetzt. Beispiel: Die Tätigkeit 2 (Produzieren des Gutes B) wird in Mengeneinheiten des Gutes B gemessen. Eine Einheit (= 1 ME B) bringt einen Gewinn von DM 250.--. In Spalte 0 (Zeile 1-3) stehen die Tätigkeiten mit positivem Niveau und in Spalte Gesamt stehen die Niveaubeträge. Beispiel: Die Tätigkeit 4 erscheint in der Ausgangslösung mit 200 Einheiten. Die Ausgangslösung lautete: $x_4 = x_5 = x_6 = 200, x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Eine Tätigkeit mit dem Niveau Null kann nur ein positives Niveau annehmen, wenn die Niveaus der Tätigkeiten mit positivem Niveau um gewisse Beträge reduziert werden. Die Tätigkeit 2 kann zum Beispiel nur das Niveau 1 (statt bisher das Niveau Null) annehmen, wenn die Niveaus der Tätigkeiten 4, 5 und 6 so reduziert werden, daß die Gleichungen befriedigt werden. Aus dem Simplex-Tableau kann man den Umfang der erforderlichen Reduzierungen erkennen (siehe Spalte 2). Wenn die Tätigkeit 2 das Niveau 1 annimmt, muß das Niveau der Tätigkeit 4 um 1 Einheit (d.h. auf 199 Einheiten), das Niveau der Tätigkeit 5 um 1,5 Einheiten (auf 198,5) und das Niveau der Tätigkeit 6 um 0,5 Einheiten (auf 199,5) reduziert werden. Die Auswirkung auf den Gewinn kann in Zeile 5 abgelesen werden. Die Reduzierung der Niveaus der Tätigkeiten 4, 5 und 6 hat keinen Einfluß auf den Gewinn, da alle drei Tätigkeiten keinen Gewinnbeitrag leisten (siehe Spalten 4-6, Zeile 4). Der Saldo der Auswirkungen auf den Gewinn steht in Zeile 6. Die Erhöhung des Niveaus der Tätigkeit 2 um 1 Einheit führt - da die erforderliche Reduzierung den Gewinn nicht mindert - zu einer Gewinnerhöhung von DM 250.--. Eine Lösung, bei der für eine Tätigkeit die Größe $g-z$ positiv ist, kann demnach nicht optimal sein. In unserem Beispiel ist das gleich bei drei Tätigkeiten der Fall (Tätigkeit 1: $g-z = 350$, Tätigkeit 2: $g-z = 250$, Tätigkeit 3: $g-z = 300$). Da bei Tätigkeit 1 $g-z$ am größten ist, wird diese Tätigkeit für die Niveauerhöhung ausgewählt. Weil eine Lösung angestrebt wird, in der nur drei Tätigkeiten ein positives Niveau haben, wird das Niveau der Tätigkeit 1 gerade um so viel erhöht, daß dadurch das Niveau einer der Tätigkeiten 4, 5 und 6 auf Null reduziert wird und das Niveau der anderen beiden Tätigkeiten positiv

bleibt. Nach Umrechnung ¹⁾ erhält man für das zweite Tableau folgende Werte:

	0	1	2	3	4	5	6	Gesamt
1 x_4		0	$\frac{5}{8}$	2	1	$-\frac{1}{4}$	0	150
2 x_1		1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
3 x_6		0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	200
4 g_j		350	250	300	0	0	0	
5 z_j		350	$\frac{525}{2}$	0	0	175	0	
6 $g_j - z_j$		0	$-\frac{25}{2}$	300	0	-175	0	

Tab. 1

Die Lösung $x_4 = 150$, $x_1 = 100$, $x_6 = 200$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$ ist nicht optimal. Für Tätigkeit 3 ist $g-z$ positiv. Die Umrechnung liefert das dritte Tableau:

	0	1	2	3	4	5	6	Gesamt
1 x_3		0	$\frac{5}{16}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	75
2 x_1		1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
3 x_6		0	$\frac{3}{16}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1	125
4 g_j		350	250	300	0	0	0	
5 z_j		350	$\frac{5700}{16}$	300	150	$\frac{275}{2}$	0	
6 $g_j - z_j$		0	$-\frac{425}{4}$	0	-150	$-\frac{275}{2}$	0	

Tab. 2

Da für keine Tätigkeit $g-z$ positiv ist ²⁾, ist die Optimallösung

- 1) Rechentechnische Einzelheiten vgl. bei Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R.: a.a.O., S. 89 ff.
- 2) Das Optimalitätskriterium lautet genau: für Tätigkeiten mit positivem Niveau $g-z = 0$, für Tätigkeiten mit dem Niveau Null $g-z < 0$.

erreicht. Sie lautet: $x_1 = 100$, $x_3 = 75$, $x_6 = 125$, $x_2 = x_4 = x_5 = 0$. Der Betrieb erzielt den höchsten Gewinn in Höhe von DM 57500.--, wenn er monatlich 100 ME A und 75 ME C produziert. Dabei werden die Kapazitäten der Maschinen I und II voll ausgenutzt. Die Kapazität der Maschine III wird mit 75 Betriebsstunden = 37,5 % in Anspruch genommen.

Die Eintragungen in der Schlußtafel haben im einzelnen folgende Bedeutung: In Zeile 1-3, Spalte 0, stehen die Tätigkeiten, die in der Lösung mit positivem Niveau vertreten sind. In Spalte "Gesamt" stehen die Niveauhöhen (Umfänge der Tätigkeiten). Die Eintragungen in den Spalten 1-6 sollen an Hand der Spalte 4 erläutert werden. Die Eintragungen der Spalte 4 sind die y -Werte folgender Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 2y_1 + 0,5y_2 + 0y_3 \\ 0 &= 0y_1 + 2y_2 + 0y_3 \\ 0 &= 1y_1 + 0y_2 + 1y_3. \end{aligned}$$

Die Gleichungen drücken die Tätigkeit 4 durch die Tätigkeiten 3, 1 und 6 aus (vgl. die Spalten 4, 3, 1 und 6 der Tabelle S. 47). Wenn Tätigkeit 4 mit einer Einheit in die Lösung einbezogen werden soll, dann muß Tätigkeit 3 um $1/2$ Einheit reduziert und Tätigkeit 6 um $1/2$ Einheit erhöht werden ($y_1 = 0,5$, $y_3 = -0,5$). Eine Einheit der Tätigkeit 4 erhöht den Gewinn nicht (vgl. Zeile 4). Reduzierung der Tätigkeit 3 um $1/2$ Einheit verringert den Gewinn um 150.--DM, Erhöhung der Tätigkeit 6 verändert den Gewinn nicht (vgl. Zeile 5). Der Saldo der Gewinnänderungen bei Einbeziehung der Tätigkeit 4 steht in Zeile 6.

VIII. Ein Spezialfall: Die Wirtschaftlichkeit eines einzelnen Projekts

Ein Betrieb habe die Produktionsfunktion $F(x_1, x_2, x_3; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = 0$. Es soll gelten für die Herstellung des Produkts

Produkts X_1 : $v_1^{(1)} : v_2^{(1)} : v_3^{(1)} : v_4^{(1)} = \text{constans } (1)$

Produkts X_2 : $v_1^{(2)} : v_2^{(2)} : v_3^{(2)} : v_4^{(2)} = \text{constans } (2)$

Produkts X_3 : $v_1^{(3)} : v_2^{(3)} : v_3^{(3)} : v_4^{(3)} = \text{constans } (3)$

Die Faktorproportionen für die Herstellung einer ME des Produkts X_1 seien $a_{11}:a_{21}:a_{31}:a_{41}$ und die fixe Menge $v_5^{(1)}$, des Produkts X_2 seien $a_{12}:a_{22}:a_{32}:a_{42}$ und " " " $v_5^{(2)}$, des Produkts X_3 seien $a_{13}:a_{23}:a_{33}:a_{43}$ und " " " $v_5^{(3)}$.

Die verfügbaren Mengen an den Faktoren 1, 2 und 3 sollen für den Rechnungszeitraum als fix gelten. Die Funktion

$$G = x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 d_3 - Kf$$

mit den Bedingungen $b_1 \leq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$

$$b_2 \leq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$b_3 \leq a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

erreiche ihr Maximum G' , wenn $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$. Es ist geplant, eine Maschine V_6 anzuschaffen, durch die für die Herstellung der Produkte X_1, X_2 und X_3 je ein weiteres Produktionsverfahren ermöglicht wird. Die mit den neuen Produktionsverfahren hergestellten Produkte X_1, X_2 und X_3 sollen mit X_7, X_8 und X_9 bezeichnet werden. Bei den neuen Produktionsverfahren soll wegen der Qualität der Maschine V_6 die Maschine V_1 nicht mehr benötigt werden. Die Faktorproportionen für 1 ME des Produkts X_7 seien

$$a_{27}:a_{37}:a_{47}:a_{67},$$

des Produkts X_8 seien $a_{28}:a_{38}:a_{48}:a_{68},$

des Produkts X_9 seien $a_{29}:a_{39}:a_{49}:a_{69}.$

Der Gewinn sei $\bar{G} = \bar{x}_1 d_1 + \bar{x}_2 d_2 + \bar{x}_3 d_3 + x_7 d_7 + x_8 d_8 + x_9 d_9 - (Kf + \Delta Kf)$ mit den Bedingungen

$$b_1 \leq \bar{v}_1 = a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3$$

$$b_2 \leq \bar{v}_2 = a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 + a_{27}x_7 + a_{28}x_8 + a_{29}x_9$$

$$b_3 \leq \bar{v}_3 = a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 + a_{37}x_7 + a_{38}x_8 + a_{39}x_9$$

$$b_6 \leq v_6 = a_{67}x_7 + a_{68}x_8 + a_{69}x_9$$

Die Wirtschaftlichkeit der Maschine V_6 soll durch die Größe $D_6 = \max (\bar{G} - G')$ angegeben werden ¹⁾.

Bevor wir ein Zahlenbeispiel dieses Problems durchrechnen, müssen wir auf eine Konsequenz hinweisen, die aus der Einbeziehung des Betriebsganzen in den Kalkül folgt. Wenn man nach der Wirtschaftlichkeit einer Investition fragt, wie sie sich aus einer speziellen betrieblichen Situation für einen Investor ergibt, dann fragt man nach der durch die Investition verursachten Änderung der Gesamtwirtschaftlichkeit ²⁾. Mit anderen Worten, man fragt nach der ökonomischen Auswirkung der durch die Investition hervorgerufenen Veränderung der technischen Produktionsmöglichkeiten. Solange mit einem Linear Programming-Modell gearbeitet wird, welches nur eine Periode erfaßt, mißt man die Wirtschaftlichkeit an den Verhältnissen dieser Periode. Damit taucht die Frage nach der Ausdehnung des zugrunde zu legenden Zeitraumes auf. Zahlenangaben, die allgemeine Gültigkeit besitzen, können nicht gemacht werden. Ein Anhaltspunkt für die größtmögliche Ausdehnung findet sich in der Annahme, auf der die Nebenbedingungen eines Linear Programming-Modells beruhen: Die Kapazitäten der Produktivitäten sind gegeben und können während des Rechnungszeitraumes nicht verändert werden. Es folgt daraus, daß der Rechnungszeitraum eines Linear Programming-Modells im allgemeinen kürzer als die Investitionsdauer sein wird.

Wenn die Wirtschaftlichkeit einer Investition aus den Daten einer Periode, die im allgemeinen kürzer als die Investitionsdauer ist, errechnet werden soll, dann stellt sich die Frage, wie die Einflüsse, die aus dem nichterfaßten Teil der Investitionsdauer stammen, berücksichtigt werden können. Externe, das heißt nicht aus dem Betriebssystem herrührende Einflüsse auf die Wirtschaftlichkeit, zum Beispiel Preisänderungen auf Beschaf-

1) Unter besonderen Bedingungen auch durch $\frac{\max(\bar{G} - G')}{\text{Anschaffungsbetrag}}$ (vgl. S. 56).

2) Zu der gleichen Feststellung kommt Albach:
"Einem einzelnen Wirtschaftsgut kommt kein ihm eigener Grad an Wirtschaftlichkeit zu, denn es muß stets in Verbund mit den anderen Gütern einer Unternehmung gesehen werden, und der Grad seiner Wirtschaftlichkeit leitet sich lediglich aus der Veränderung der Gesamtwirtschaftlichkeit ab", in Albach, Horst: Wirtschaftlichkeitsrechnungen bei unsicheren Erwartungen, S. 54.

fungs- und/oder Absatzmärkten, können in einem einstufigen Modell nicht berücksichtigt werden. Besitzt der Investor hinreichend sichere Erwartungen für den nicht erfaßten Zeitraum der Investitionsdauer oder für einen Teil davon, so muß er mit einem mehrstufigen Modell arbeiten (vgl. Abschnitt IX, C, S. 76). Nur wenn er diese Erwartungen nicht besitzt und er gezwungen ist, Konstanz der Daten anzunehmen, kann er mit einem einstufigen Modell arbeiten. Dabei müssen die internen Einflüsse antizipiert werden:

Es soll angenommen werden, daß der Investor, ausgehend von der auf S. 50 errechneten Optimalnutzung, die Anschaffung einer Maschine plant, die zusammen mit den vorhandenen Maschinen der Produktion der Güter A und/oder B und/oder C dienen soll. Aus den technischen Daten kann der Investor die Leistungsfähigkeit der Maschine entnehmen. Auf unser Beispiel übertragen heißt das, der Investor kann angeben, wieviel Betriebsstunden bei Herstellung einer ME A, einer ME B und einer ME C an der neuen Maschine beansprucht werden. Diese Leistungsfähigkeit muß für die gesamte Investitionsdauer gelten. Das wird im allgemeinen nur möglich sein, wenn durch einen von Periode zu Periode steigenden Einsatz von Betriebs- und Instandhaltungskosten dem Verschleiß entgegengewirkt wird. Diese Entwicklung kann dadurch berücksichtigt werden, daß die Betriebs- und Instandhaltungskosten in die variablen Kosten einbezogen werden. Wird zum Beispiel aus den technischen Daten einer Maschine entnommen, daß mit ihr während des ersten Jahres bei variablen Betriebs- und Instandhaltungskosten von 100 000.--DM 10 000 Stück des Produktes A und 5 000 Stück des Produktes B hergestellt werden können, und wird angenommen, daß im zweiten Jahr (Investitionsdauer 2 Jahre) für die gleichen Leistungsmengen 110 000.--DM variable Betriebs- und Instandhaltungskosten aufgewandt werden müssen, dann müssen für das einstufige Modell (Rechnungsperiode 1 Jahr) variable Betriebs- und Instandhaltungskosten von

$$\frac{210000.-}{20000} = 10,50 \text{ DM/Stück des Produkt A bzw.}$$

$$\frac{210000.-}{10000} = 21,-- \text{ DM/Stück des Produkts B in die}$$

variablen Kosten einbezogen werden ¹⁾.

Ist es aus technischen Gründen nicht möglich, konstante Kapazität für die gesamte Investitionsdauer anzunehmen, muß mit einem mehrstufigen Modell gearbeitet werden.

Soweit ein Linear Programming-Modell für Investitionsrechnungen nur eine Periode umfaßt, müssen die variablen Kosten einen Anteil für Betriebs- und Instandhaltungskosten enthalten, der in einer ex-ante-Rechnung für die Investitionsdauer errechnet worden ist.

Damit ist es möglich, reine Ersatzinvestitionen aus unseren künftigen Betrachtungen auszuschließen, da unter unseren Annahmen der Ersatz einer Maschine durch eine gleichartige neue die technischen Produktionsmöglichkeiten nicht verändert. Zudem konzentriert sich bei der Frage nach dem besten Ersatzzeitpunkt die Untersuchung mehr auf die Daten der betrachteten Maschinen als auf deren Verflechtung in einem Betriebssystem, so daß der Einsatz des Linear Programming nicht nötig ist.

Unserem Beispiel lag ein Zeitraum von einem Monat zugrunde. In vielen Fällen ist für eine Investitionsrechnung ein längerer Zeitraum zu verwenden. Die Umrechnung auf den Zeitraum von einem Jahr liefert $x_1 = 1200$, $x_3 = 900$, $x_6 = 1500$, $G = 350 \cdot 1200 + 300 \cdot 900 = 690\,000$. Die fixen Kosten sollen DM 480 000.-- betragen. Der Investor erwäge die Anschaffung einer Maschine, die die Funktionen der Maschine I ausübt, mit den Daten

Anschaffungskosten	DM	500 000.--,
Inanspruchnahme bei Herstellung	1 ME A:	1 1/9 Betrst.,
"	"	" 1 ME B: 1 2/3 " .,
"	"	" 1 ME C: 1 1/4 " .

Durch den Einsatz der Maschine verringern sich die variablen Kosten pro ME A um DM 10.--,
" ME B um DM 10.--,
" ME C um DM 50.--.

1) Von einer Diskontierung soll abgesehen werden.

Die Kostensenkungen sollen bei Produkt C durch Lohneinsparungen, bei den Produkten A und B durch Materialeinsparungen bewirkt werden.

Die Installationsdauer soll vernachlässigt werden können.

Als wirtschaftliche Lebensdauer wird ein Zeitraum von 5 Jahren angenommen. Der erwartete Schrottwert sei DM 50 000.--.

Die Produktionsmöglichkeiten sollen durch folgende Gleichungen beschrieben werden (zugrunde gelegter Zeitraum 1 Jahr):

bisherige Produktionsmöglichkeiten:

$$2400 = 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 2x_7 + 1,5x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0,5x_8 + 1x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1,1x_7 + 1,6x_8 + 1,25x_9 + 1x_{10}$$

In der ersten Gleichung sind die Koeffizienten von x_7 , x_8 und x_9 Null, weil die neue Maschine die gleichen Funktionen wie Maschine I ausübt. Die Tätigkeiten 7, 8 und 9 bezeichnen die durch die neue Maschine ermöglichten Produktionsverfahren für die Produkte A, B und C. Tätigkeit 10 entspricht den Tätigkeiten 4, 5 und 6.

Die Zielfunktion lautet $G = 350x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 360x_7 + 260x_8 + 350x_9$. Die Errechnung des Optimalprogrammes führt zu dem folgenden Simplex-Tableau:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Gesamt
1 x_4		0	$-\frac{3}{8}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	-2	$\frac{23}{18}$	$\frac{31}{24}$	0	$\frac{8}{5}$	840
2 x_1		1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	0	1200
3 x_3		0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$-\frac{8}{9}$	$-\frac{5}{6}$	0	$-\frac{4}{5}$	480
4 x_9		0	0	0	0	0	0	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	1920
5 g_j		350	250	300	0	0	0	360	260	350	0	
6 z_j		350	$\frac{825}{2}$	300	0	175	300	$\frac{3550}{9}$	$\frac{2875}{6}$	350	40	
7 $g_j - z_j$		0	$-\frac{325}{2}$	0	0	-175	-300	$-\frac{310}{9}$	$-\frac{1315}{6}$	0	-40	

$$x_1 = 1200, x_3 = 480, x_4 = 840, x_9 = 1920, x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{10} = 0$$

Bei bestmöglicher Nutzung aller Anlagen werden 1200 ME A und 2400 ME C produziert. Die Maschine I bleibt mit 840 Betriebsstunden ungenutzt, alle anderen Maschinen werden voll in Anspruch genommen.

Bei Durchführung des Optimalprogrammes wird ein Gewinn von
 $DM\ 350.-- \cdot 1200 + DM\ 300.-- \cdot 480 + DM\ 350.-- \cdot 1920$
 $= DM\ 1\ 236\ 000.--$ erzielt.

Die fixen Kosten sollen sich, abgesehen von kalkulatorischen Zinsen, von 480 000.--DM um $\frac{500\ 000.-- - 50\ 000.--}{5} = 90\ 000.--DM$ Abschreibungen und 10 000.--DM sonstige Fixkosten auf 580 000.--DM erhöhen. Es soll unter "bereinigter Gewinn" der Gewinn so, wie der Ausdruck bisher verwendet wurde, abzüglich fixer Kosten verstanden werden. Der bereinigte Gewinn ist dann
 $1236000.--DM - 580\ 000.--DM = 656000.--DM$.

Vor der Investition betrug der bei optimaler Nutzung erreichbare Maximalgewinn 690000.--DM - 480000.--DM = 210000.--DM. Der jährliche Gewinnzuwachs beträgt daher 446000.--DM. Das entspricht einer durchschnittlichen jährlichen Verzinsung von

$$\frac{446000}{275000} = 162,2\ \% \quad 1).$$

Für Wirtschaftlichkeitsrechnungen ist der gesamte Gewinnzuwachs der investierten Maschine zuzurechnen; denn für den Investor stellt sich die Situation so dar, daß er ohne Investierung den Gewinn überhaupt nicht steigern kann, weil er den möglichen Maximalgewinn bereits erzielt, und daß er durch Investierung von DM 500 000.-- einen Gewinnzuwachs von 446000.-- erzielt. Der Errechnung des internen Zinsfußes wird der Einnahmeüberschuß zugrundegelegt. Die jährlichen Einnahmen vor der Investition betrugen 690 000.--DM, nach der Investition werden 1226000.--DM eingenommen (1236000.--DM abzüglich 10 000.--DM zusätzliche Fixkosten). Es gilt dann
 $536000\ q^{-1} + 536000\ q^{-2} + 536000\ q^{-3} + 536000\ q^{-4} + 586000\ q^{-5}$
 $= 500\ 000$. Man erhält $q = 1 + \frac{1}{100} = 1,01$. Der interne Zinsfuß der Investition beträgt somit rund 10,1 %. Die starke Abweichung zwischen internem Zinsfuß und Durchschnittsverzinsung

1) Die Bezugsgröße 275000 ist das während der Investitionsdauer durchschnittlich gebundene Kapital: $\frac{450000}{2} + 50000$.

wird durch die Höhe des Zinsniveaus verursacht. Dies zeigt die folgende Tabelle:

	gebundenes Kapital	Einnahmen	Zinsbetrag	Tilgung
Ende 1. Jahr:	500 000	536 000	522 500	13 500
" 2. " :	486 500	536 000	508 393	27 607
" 3. " :	458 893	536 000	479 543	56 457
" 4. " :	402 436	536 000	420 546	115 454
" 5. " :	286 982	586 000	299 896	286 104

Stehen mehrere alternative Möglichkeiten mit verschiedenem Zinssatz und verschiedener Investitionsdauer zur Wahl, so kann mit dem Zinssatz der relative Vorteil zum Kriterium gemacht und der absolute Vorteil außer acht gelassen werden, wenn wir annehmen, daß der Betrieb fortgeführt wird und daß nach Ablauf der Investitionsdauer die Investition wiederholt wird, falls zu diesem Zeitpunkt keine günstigere Möglichkeit vorhanden ist.

IX. Die optimale Investierung eines gegebenen Investitionsfonds

A. Eine Auswahl aus den bisherigen Beiträgen zur Behandlung des Problems

Schneider stellt in anderem Zusammenhang fest: "Ein Unternehmer, der eine Maschine für a GE kauft, rechnet also, wenn er rational handelt, nicht nur damit, daß der Kapitalwert positiv ist, sondern auch damit, daß er größer ist als der jeder anderen, alternativen, ihm bekannten und zur Verfügung stehenden Anwendungsmöglichkeiten des gleichen Betrages von a GE " ¹⁾.

Die Schwierigkeit, die optimale Investierung eines gegebenen Betrages festzustellen, beruht darauf, daß es im allgemeinen sehr viele Möglichkeiten gibt, einen Betrag A auf eine Anzahl Investitionsobjekte zu verteilen und es daher nicht möglich ist, jede der Möglichkeiten einzeln zu berechnen.

Die Zahl s der Objekte, auf die ein (positiver) Teilbetrag a entfällt, ist unbestimmt. Sie kann ganzzahlige Werte zwischen

1) Schneider, Erich: Wirtschaftstheorie, S. 245 f.

1 und einer Obergrenze 1 annehmen. Der Betrag A stellt ebenfalls nur eine Obergrenze dar, denn wegen der relativen Unteilbarkeit der Anlagen muß gelten:

$$\text{Summe der Teilbeträge} \leq A.$$

Die Aufgabe besteht darin, die Verteilung $V^{(s)} = (a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_s^{(s)})$ zu finden, für die der Investitionsgewinn ein Maximum ist. Die Vorteilhaftigkeit der gesamten Investition kann aber nicht aus der Vorteilhaftigkeit der einzelnen Objekte, die sie umfaßt, abgeleitet werden ¹⁾. Es ist also nicht möglich, die aus den Treppenfunktionen (vgl. S. 104) der einzelnen Objekte ermittelten Einzel-Vorteilhaftigkeiten für die Feststellung der Gesamt-Vorteilhaftigkeit zu verwenden. Die Treppenfunktionen gelten nur für den Fall, daß die Kapazität der betrachteten Anlage erweitert wird, die Kapazitäten aller anderen Anlagen aber konstant bleiben.

Albach stellt fest: "Das Problem liegt darin, daß bei betrieblicher und gesamtwirtschaftlicher Interdependenz ein Investitionsvorhaben j bei k möglichen Kombinationen mit anderen Investitionsvorhaben k verschiedene Grade an Vorteilhaftigkeit für den Betrieb haben kann, das heißt, der Grad der Vorteilhaftigkeit i wird bestimmt durch die Kombination, in der das Vorhaben verwirklicht wird.

Bei j möglichen Investitionsvorhaben und k möglichen Kombinationen gibt es i_{kj} mögliche interne Zinsfüße

$$i = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \dots & i_{1j} \\ i_{21} & i_{22} & \dots & i_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{k1} & i_{k2} & \dots & i_{kj} \end{pmatrix} \quad 2)$$

1) Anderer Ansicht ist Brandt, wenn er die Kapitalverzinsung als Vergleichsmaßstab nimmt. Dazu ist festzustellen: Die Kapitalverzinsung gibt es bei abhängigen Anlagen nicht. Die Verzinsung richtet sich danach, mit welchen anderen Anlagen zusammen das betreffende Objekt investiert werden soll. Vgl. Brandt, Investitionspolitik des Industriebetriebes, Wiesbaden 1959, S. 205 u. S. 217.

2) Albach, Horst: Wirtschaftlichkeitsrechnungen bei unsicheren Erwartungen, S. 55.

Wir sind im Gegensatz zu Albach der Meinung, daß die Komplizierung des Problems nicht durch die möglicherweise sehr große Anzahl i_{kj} interner Zinsfüße verursacht wird. Den Investor interessiert der interne Zinsfuß eines einzelnen Objektes innerhalb einer der möglichen Kombinationen von Investitionsobjekten gar nicht. Ihn interessiert nur der interne Zinsfuß der Kombination. Da es in der Schreibweise Albachs k mögliche Kombinationen gibt, verringert sich das Problem um $(j-1)k$ Dimensionen. Das heißt, der Investor, der einen Betrag A zur Verfügung hat und optimale Investierung anstrebt, sucht unter k Zinsfüßen den größten ¹⁾. Die Komplizierung rührt daher, daß k sehr groß ist. Die Anzahl möglicher Kombinationen hängt u.a. von der Anzahl der Investitionsvorhaben ab. Die Zahl der Investitionsvorhaben ist aber ein Vielfaches der Zahl der Investitionsobjekte. Das Investitionsobjekt Maschine M_I , Anschaffungskosten a_I DM, umschließt die n Vorhaben:

- | | | |
|-----|-----------------|--------------------------------------|
| 1 | Maschine M_I | anschaffen |
| 2 | Maschinen " | " |
| . | | |
| . | | |
| . | | |
| n | Maschinen M_I | anschaffen ($n \cdot a_I \leq A$). |

Die Leistungsfähigkeit des Linear Programming im Hinblick auf das angedeutete Problem wird von Albach unterschiedlich beurteilt. "Ein befriedigendes formales Lösungsmodell zur optimalen Programmierung unteilbarer Produktionsfaktoren, also insbesondere des Anlagenproblems, steht aber heute erst in der Entwicklung" ²⁾. "Ein exaktes quantitatives Verfahren liegt nicht vor" ³⁾. Andererseits stellt Albach fest, daß man mit der linearen Programmierung "im einstufigen Prozeß die optimale Verteilung der verfügbaren und möglichen Kapitalmittel berechnen kann" ⁴⁾.

1) Hierbei leitet sich der interne Zinsfuß einer Kombination aus der Änderung der Gesamtwirtschaftlichkeit des Betriebes ab.

2) Albach, Horst: Wirtschaftlichkeitsrechnungen bei unsicheren Erwartungen, S. 53.

3) Ebenda, S. 55.

4) Ebenda, S. 68.

Albach hält das von Bellmann entwickelte Dynamic Programming für besonders geeignet. "Die Bedeutung dieser Lösungsmethode für die Theorie der Investitionsrechnung ist daher evident; Bellmann selbst hat sie auf das Ersatzproblem angewandt. Die Theorie ist jedoch auch auf Neuinvestitionen anwendbar" ¹⁾. Das Dynamic Programming liegt außerhalb des Rahmens unserer Arbeit. Wir werden deshalb nicht darauf eingehen. Die von Albach konstatierte Bedeutung des Dynamic Programming für Investitionsrechnungen vermochten wir jedoch nicht festzustellen. Wir glauben, daß die Beschränkung auf das Ersatzproblem durch Bellmann wohlbegründet ist.

Zu den Problemen, die mit Dynamic Programming behandelt werden können, schreibt Ferschl ²⁾: "Wesentlich für solche Prozesse ist die Tatsache, daß Änderungen auf einer bestimmten Stufe wohl den nachfolgenden Prozeß, nicht aber den vorhergehenden Ablauf beeinflussen. Jede Aufgabe, die sich als mehrstufiger Prozeß mit obigen Eigenschaften interpretieren läßt, ist den Methoden des Dynamic Programming zugänglich". Bei der stufenweisen Verteilung eines Investitionsbetrages auf die möglichen Investitionsobjekte sind die obigen Voraussetzungen aber keineswegs gegeben, weil jede Veränderung der Kombination vollständig neue Voraussetzungen schafft, diese aber nicht nur die weiteren Entscheidungen beeinflussen, sondern auch die Richtigkeit der bisherigen Entscheidungen in Frage stellen.

Eine spezielle Version des Investitionsproblems findet sich bei Vajda ³⁾. Neben dem Investitionsbetrag M sind gegeben: die Anlagetypen: $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ und die zugehörigen Gewinnerhöhungen bezogen auf den investierten Betrag von 3%, 2,5%, 3,5%, 4%, 5%, 4,5%.

Gesucht sind die zur Anschaffung der sechs Anlagetypen aufzuwendenden Teilbeträge

$$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 .$$

Auf Grund der betrieblichen Bedingungen sollen mindestens 40 % in A_1 und A_2 investiert werden und nicht mehr als jeweils 35 % in einen der anderen Typen B und C . Es gilt also

- 1) Albach Horst: Wirtschaftlichkeitsrechnungen bei unsicheren Erwartungen, S. 68.
- 2) Ferschl, Franz: Grundzüge des Dynamic Programming, in: "Unternehmensforschung", Band 3, Heft 2, Würzburg 1959, S. 79.
- 3) Vajda, S.: Readings in Linear Programming, London 1958, S. 46 f.

$$E = 3x_1 + 2,5x_2 + 3,5y_1 + 4y_2 + 5z_1 + 4,5z_2 = \text{Max!}$$

$$\text{wenn } x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = M$$

$$x_1 + x_2 - t_1 = 0,4 M.$$

$$y_1 + y_2 + t_2 = 0,35 M$$

$$z_1 + z_2 + t_3 = 0,35 M.$$

Die Einführung der Schlupfvariablen t_1 , t_2 und t_3 ermöglichte es, die geforderten Bedingungen in der Form von Gleichungen zu schreiben.

Aus dem Ansatz Vajdas ist zu entnehmen, daß unendliche Teilbarkeit der Anlagen angenommen ist. Das Ergebnis der Rechnung kann daher unbrauchbar sein. Außerdem nimmt Vajda an, daß die den Anlagentypen zugeordneten Gewinnerhöhungen konstant sind. Dies ist aber schon dann nicht immer der Fall, wenn die Kapazität einer Anlage erweitert wird und die übrigen Kapazitäten konstant bleiben (vgl. S. 106). In dem Fall, daß mehrere Kapazitäten gleichzeitig verändert werden, gibt es eine Gewinnerhöhung, die einem einzelnen Anlagentyp zugerechnet werden könnte, nicht. Es existiert nur eine Gewinnerhöhung für die Gesamtinvestition. Der Ansatz Vajdas ist daher nur gültig, wenn in dem zugehörigen Betriebsmodell

$$g_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \quad \text{und} \quad a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j^1).$$

Das heißt, die Nutzung einer Anlage für eine Tätigkeit schließt die Nutzung anderer Anlagen für die gleiche Tätigkeit aus, eine Annahme, die für die unabhängige Parallelproduktion zutrifft.- Für diesen Sachverhalt reichen aber die traditionellen Verfahren für Investitionsrechnungen aus.

Der allgemeine Fall, daß in einem Linear Programming-Problem der Optimalwert einer Anzahl Variabler gesucht wird, wenn die

1) Mit g_j wird der Überschuß des Erlöses über die variablen Kosten, bezogen auf eine Mengeneinheit des Produktes j , bezeichnet; a_{ij} drückt die Anzahl der Kapazitätseinheiten der Anlage i aus, die bei Herstellung einer Mengeneinheit des Produktes j beansprucht wird; u_i ist der Wert, der einer Kapazitätseinheit der Anlage i zuzurechnen ist, wenn alle Anlagen des Betriebes optimal genutzt werden. Vgl. S. 99 f.

Nebenbedingungen nicht gegeben; sondern veränderlich sind, ist bei Stahlknecht ¹⁾ behandelt. Stahlknecht entwickelt eine Rechentechnik, durch welche die Abhängigkeit einer (gültigen) Lösung von dem Wert der einzelnen Parameter dargestellt wird. Erlauben es die tatsächlichen Verhältnisse, den Parametern jenen Wert beizulegen, der für die Gültigkeit der Lösung erforderlich ist, dann ist die errechnete Lösung unter den gegebenen Verhältnissen optimal. Dieses Verfahren bringt für unsere Fragestellung keinen Vorteil, weil für die einzelnen Parameter (das sind die Kapazitäten der vorhandenen und zu beschaffenden Anlagen) keine allgemeingültigen Grenzen angegeben werden können. Damit entfällt die Möglichkeit des systematischen Vorgehens bei der Lösungshandlung.

B. Die optimale Investierung eines gegebenen Investitionsbetrages im einstufigen Modell

Ein Betrieb produziere mit der Faktorkombination

$v' = (v'_1 \dots v'_n)$ die optimale Produktkombination

$x' = (x'_1 \dots x'_m)$ und erziele den Maximalgewinn

$$G' = \sum_{i=1}^m x'_i d_i - K_f \text{ unter den Bedingungen}$$

$$b_j \geq v'_j = \sum_{i=1}^m a_{ji} x'_i \quad (j = 1, 2, \dots, k \ (k \leq n)) \quad (a_{ji}: \text{Zahl}$$

der beanspruchten Leistungseinheiten des Faktors V_j bei der Herstellung einer ME X_i) .

Es stehe ein Investitionsfonds zur Verfügung, der zur Anschaffung weiterer Einheiten der Produktionsfaktoren V_j verwendet werden kann. Darüberhinaus soll es h Produktionsfaktoren geben, die sich zur Einfügung in das Betriebssystem eignen und von denen ebenfalls Einheiten angeschafft werden können.

Aus den $(k + h)$ Faktoren, die für eine Anschaffung in Frage

1) Stahlknecht, Peter: Linear Programming bei betriebswirtschaftlichen Problemen mit veränderlichen Bedingungen, Diss. Leipzig 1958; ders.: Optimale Betriebsmatrizen, in: "Unternehmensforschung", Bd. 3, Heft 1, Würzburg 1959, S. 17 ff.

2) Wegen der Bedeutung der Symbole siehe S. 84.

kommen, sollen im Rahmen des Investitionsfonds C w Kombinationen K_y der Art

$$\begin{aligned} & t_1 \text{ Einheiten } V_1 \\ & t_2 \text{ Einheiten } V_2 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & t_{k+h} \text{ " } V_{k+h} \text{ gebildet werden können.} \end{aligned}$$

Wird die Kombination K_y ($y=1,2 \dots w$) realisiert, dann habe der Betrieb die Produktionsfunktion

$$F_y(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_m, x_{m+1} \dots x_{m+r}; \bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1} \dots \bar{v}_n, v_{n+1} \dots v_{n+h} \dots v_{n+s}) = 0 \text{ und die Gewinnfunktion}$$

$$\bar{G}_y = \bar{x}_1 d_1 + \dots + \bar{x}_m d_m + x_{m+1} d_{m+1} + \dots + x_{m+r} d_{m+r} - K_y \text{ mit den}$$

Bedingungen

$$b_j + \Delta b_j \leq \bar{v}_j = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i a_{ji} + \sum_{z=m+1}^{m+r} x_z a_{jz} \quad (j = 1, \dots, k)$$

$$b_q \leq v_q = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i a_{qi} + \sum_{z=m+1}^{m+r} x_z a_{qz} \quad (q = k+1 \dots k+h)^{1)}$$

$$C \leq A(y)$$

$A(y)$: Anschaffungsbetrag der Kombination K_y

Es ist die Kombination K_y zu bestimmen, für die

$$D = \bar{G}_y - G' \text{ ein Maximum ist.}$$

Wie kann diese Aufgabe gelöst werden?

Zur Erläuterung unseres Lösungsvorschlages sei der Ansatz, mit dem das Optimalprogramm vor der Investition errechnet wird, wiederholt (vgl. S. 43f):

1) Da die $(n-k)$ Leistungsmengen $\bar{v}_j$ ($j=k+1, \dots, n$) nicht begrenzt sind, wollen wir sie bei der Indizierung unberücksichtigt lassen. Wir können dann für die h neuen Produktionsfaktoren q von $(k+1)$ bis $(k+h)$ laufen lassen.

Es ist

$$G = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \dots + x_m d_m - Kf,$$

wenn

$$b_1 \geq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m$$

$$b_2 \geq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$b_k \geq a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m.$$

Man kann die Ungleichungen schreiben

$$b \geq Mx,$$

wo b ein Spaltenvektor von der Dimension k , x ein Spaltenvektor von der Dimension m und M eine Matrix mit k Zeilen und m Spalten ist. Die m Spaltenvektoren $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj})$ sind die Handlungen oder Tätigkeiten, die dem Investor in der betrachteten Situation offenstehen. Durch die Rechnung wird bestimmt, in welchem Umfang die einzelnen Tätigkeiten ausgeführt werden müssen, wenn ein gestecktes Ziel möglichst gut erreicht werden soll. Nach unserer Definition der Vektoren a_j besteht der Handlungsspielraum des Investors darin, daß er m Produkte produzieren kann. Formal ist der Handlungsspielraum jedoch weiter, denn aus der Formulierung der Bedingungen als Ungleichungen folgt, daß es dem Investor auch offensteht, das Leistungspotential der Produktionsfaktoren nicht auszuschöpfen. Neben die m Produktionstätigkeiten treten k fiktive Tätigkeiten, die definiert sind als "eine Kapazitätseinheit des Faktors j ungenutzt lassen" ($j = 1 \dots k$).

Der Handlungsspielraum des Investors besteht dann aus den $m + k$ Tätigkeiten

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

Auf diesen Überlegungen beruht unser Lösungsvorschlag. Der Ansatz wird so formuliert, daß er alle in der Problemstellung enthaltenen Handlungen des Investors enthält. Nach unserem Problem umfaßt der Handlungsspielraum des Investors die Möglichkeiten

1. mit den Produktionsverfahren, die die bereits vorhandenen Faktoren ermöglichen, Produkte herzustellen,
2. weitere Einheiten der bisher vorhandenen Faktoren anzuschaffen,
3. Einheiten von Faktoren anzuschaffen, die bisher nicht vorhanden waren, sich aber zur Einfügung in das Betriebssystem eignen ¹⁾,
4. mit den Produktionsverfahren, die zur Verfügung stehen, wenn neben den bisherigen Faktoren ein neuer, mehrere neue oder alle neuen Faktoren vorhanden sind, Produkte herzustellen,
5. Kapazität der Faktoren ungenutzt zu lassen,
6. den Betrag C nicht voll zu investieren.

Wie sehen Vektoren, die die möglichen Tätigkeiten beschreiben sollen, aus?

Für die Tätigkeiten unter 1) werden die bisherigen Vektoren u_i ($i=1.....m$) verwendet. Sie werden jedoch, da es jetzt möglicherweise $k+h$ Faktoren gibt, um h Elemente erweitert. Diese Elemente haben alle den Wert Null, da keines der Produktionsverfahren die neuen Faktoren berührt. Ein weiteres Element wird nötig, weil nur ein bestimmter Investitionsbetrag C zur Verfügung steht. Auch dieses Element hat den Wert Null.

1) Projekte oder Projektgruppen, die isoliert neben das bisherige Betriebssystem treten sollen, umfaßt unser Problem nicht. Sie können getrennt berechnet werden.

a_{11}	$\dots$	a_{1m}
a_{21}		a_{2m}
$\vdots$		$\vdots$
a_{k1}		a_{km}
		mit $a_{j1} = 0$ für $j > k$
$a_{k+1,1}$		$a_{k+1,m}$
$\vdots$		$\vdots$
$a_{k+h,1}$		$a_{k+h,m}$
$a_{k+h+1,1}$		$a_{k+h+1,m}$

Die Tätigkeiten unter 2) werden definiert als "eine Einheit des Faktors j anschaffen" ($j = 1 \dots k$). Die Einheit des Faktors j enthalte pro Rechnungsperiode Δb_j Leistungseinheiten. Die Anschaffungskosten für eine Einheit des Faktors j mögen A_j Geldeinheiten betragen. Die Tätigkeiten haben dann die Vektoren

$-\Delta b_1$	0	$\dots$	0
0	$-\Delta b_2$		0
.	.		.
.	.		.
.	.		.
0	0		$-\Delta b_k$
0	0		0
.	.		.
.	.		.
.	.		.
0	0		0
A_1	A_2		A_k

Analog haben die Tätigkeiten unter 3) die Vektoren

$$\begin{array}{rcl}
 0 & \dots\dots\dots & 0 \\
 0 & & 0 \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 0 & & 0 \\
 -\Delta b_{k+1} & & 0 \\
 0 & & 0 \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 0 & & -\Delta b_{k+h} \\
 A_{k+1} & & A_{k+h}
 \end{array}$$

Durch die Vektoren zu den Tätigkeiten unter 4) werden die neu zur Verfügung stehenden Produktionsverfahren beschrieben. Das Produkt, das mit einem der neuen Produktionsverfahren hergestellt werden kann, werde mit X_z bezeichnet. Für die Herstellung einer ME X_z möge gelten

$$a_{1z} : a_{2z} : a_{k+3,z} : a_{k+4,z} = \text{constans.}$$

Der Vektor ist

$$\begin{array}{l}
 a_{1z} \\
 a_{2z} \\
 \cdot \quad \text{mit } a_{jz} + 0, j = 1, 2, k+3, k+4 \\
 \vdots \quad \text{und den übrigen } (k+h-3) \text{ Elementen} \\
 \vdots \quad a_{jz} = 0 \\
 \vdots \\
 a_{kz} \\
 a_{k+1,z} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 a_{k+h,z} \\
 a_{k+h+1,z}
 \end{array}$$

Die Tätigkeiten unter 5) haben die Vektoren

$$\begin{array}{ccc}
 a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \dots a_{1,k+h} \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \dots a_{2,k+h} \\
 . & . & . \\
 . & . & . \\
 . & . & . \\
 a_{k,1} & a_{k,2} & \text{mit } a_{ji}=1 \text{ für } i=j \quad \left\{ \begin{array}{l} i=1 \dots k+h \\ j=1 \dots k+h+1 \end{array} \right. \\
 a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \text{und } a_{ji}=0 \text{ für } i \neq j \\
 . & . & . \\
 . & . & . \\
 . & . & . \\
 . & . & . \\
 a_{k+h,1} & a_{k+h,2} & a_{k+h,k+h} \\
 a_{k+h+1,1} & a_{k+h+1,2} & a_{k+h+1,k+h}
 \end{array}$$

Analog hat die Tätigkeit unter 6) den $(k+h+1)$ -dimensionalen

$$\begin{array}{c}
 \text{Vektor} \quad 0 \\
 \quad \quad 0 \\
 \quad \quad . \\
 \quad \quad . \\
 \quad \quad . \\
 \quad \quad . \\
 \quad \quad . \\
 \quad \quad 0 \\
 \quad \quad 0 \\
 \quad \quad 1
 \end{array}$$

Alle Vektoren mögen die Matrix M bilden. Aus $\ell = Mx$ wird ein Vektor x gesucht, der

$$\bar{G} = J'x - Kf \text{ zu einem Maximum macht.}$$

Es sind noch der Spaltenvektor b und der Zeilenvektor J' zu erläutern. Für den Zeilenvektor J' wird der Zeilenvektor $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ verwendet. Dieser Vektor wird zunächst erweitert um $k+h$ Elemente $-\Delta Kf_j$ ($j = 1, 2, \dots, k+h$).

ΔKf ist der auf die Rechnungsperiode entfallende Fixkostenbetrag, der durch eine Einheit der um die Anschaffung konkurrierenden Faktoren verursacht wird. Wenn zu den bisherigen Produktionsverfahren r weitere hinzukommen, so wird J' außerdem um r Elemente erweitert. Jedes dieser Elemente $d_i = e_i - k_i$ ist einem

der neuen Produktionsverfahren zugeordnet. Schließlich wird $\mathcal{J}'$ noch um $(k+h+1)$ Elemente erweitert, die alle den Wert Null haben. Diese Elemente gehören zu den Vektoren der fiktiven Tätigkeiten unter 5) und 6). Der neue Zeilenvektor ist dann

$$\mathcal{J}' = (d_1 \dots d_m, -\Delta Kf_1, \dots, -\Delta Kf_k, -\Delta Kf_{k+1}, \dots, -\Delta Kf_{k+h}, d_{m+1}, \dots, d_{m+r}, 0(1) \dots 0(k+h+1)).$$

Der Vektor $\mathcal{J}'$ enthält somit $(m+k+h+r+k+h+1)$ Elemente, die wir ihrer Stellung entsprechend einheitlich bezeichnen wollen. Es ist dann

$$\mathcal{J}' = (d_1 \dots d_m \dots d_{m+k} \dots d_{m+k+h} \dots d_{m+k+h+r} \dots d_{m+k+h+r+k+h}, d_{m+k+h+r+k+h+1}).$$

Der Spaltenvektor $\mathcal{A}$ enthält zunächst die Elemente $b_1, b_2 \dots b_k$. Dazu kommen h Elemente $\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2} \dots \epsilon_{k+h}$. Obwohl die Faktoren j ($j=k+1, \dots, k+h$) noch nicht zum Betriebssystem gehören und ihnen deshalb während einer Rechnungsperiode 0 Leistungseinheiten entnommen werden können, wird angenommen, die Mengen der zur Verfügung stehenden Leistungseinheiten seien ϵ_j ($j=k+1, \dots, k+h$). Dies geschieht, damit für die Berechnung der Optimallösung mit Hilfe der Simplex-Methode eine Ausgangslösung sofort bereitsteht. Die Lösungsvariablen der Ausgangslösung bilden die x -Elemente, die zu den fiktiven Tätigkeiten gehören. Die ϵ_j können beliebig kleine Größen sein, mindestens jedoch so klein, daß für jedes Element des Vektors $\mathcal{A}$, für das gilt

$$x_i = \frac{\epsilon_j}{a_{ji}}, \quad \begin{matrix} (j = k+1 \dots k+h) \\ (i = (m+k+1) \dots (m+k+h+r)) \end{matrix}$$

das Produkt $x_i d_i$ vernachlässigt werden kann.

Schließlich gehört zu dem Vektor $\mathcal{A}$ das Element C . Damit ist

$$\mathcal{A} = (b_1 \dots b_k, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_{k+h}, C). \quad \text{Es ist nun}$$

$$D = \bar{G}_y - G' = \bar{G} - G'.$$

Die Aufgabe, D zu maximieren, ist gelöst, wenn

$$\bar{G} = \mathcal{J}' \mathcal{A} = \text{Max} \quad | \quad \text{unter den Bedingungen}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{M} \mathcal{A}.$$

Das ist ein normales Linear Programming-Modell.

Dazu ein stark vereinfachtes Zahlenbeispiel:

Ein Betrieb habe die Produktionsabteilungen I und II. In der Produktionsabteilung I sollen Maschinen des Typs I und in der Produktionsabteilung II Maschinen des Typs II stehen. Die Kapazität einer Produktionsabteilung soll 10 Kapazitätseinheiten betragen. In den Produktionsabteilungen können das Gut A (Tätigkeit 1) und das Gut B (Tätigkeit 2) hergestellt werden.

Dabei werden verbraucht:

für eine Mengeneinheit (ME) A	1 KE von M_I	und
	3 KE von M_{II}	
" " "	B 2 KE von M_I	und
	1 KE von M_{II}	.

An variablen Kosten entstehen 2 Geldeinheiten (GE) pro ME A und 2,5 GE pro ME B. Die Erlöse betragen 4 GE für 1 ME A und 3,5 GE für 1 ME B. Der Betrieb habe 12 GE für Investitionen zur Verfügung. Maschinen, mit denen neue Produktionsverfahren eingeführt werden können, sollen nicht existieren. Die Frage lautet dann: Wie sind die vorhandenen Kapazitäten von je 10 KE zu erweitern, damit die 12 GE optimal investiert werden?

Bei Anschaffung einer Maschine M_I bzw. M_{II} sollen sich die Kapazitäten um je 5 KE vergrößern. Die Anschaffungskosten betragen 4 GE für eine Maschine M_I und 6 GE für eine Maschine M_{II} . Die Fixkostenerhöhung beläuft sich auf 2 GE für eine Maschine M_I und 1,5 GE für eine Maschine M_{II} .

Die optimale Nutzung der bisher vorhandenen Anlagen folgt aus der Lösung der Aufgabe:

$$\begin{aligned} G &= 2x_1 + 1x_2 \text{ zu maximieren, wenn} \\ 10 &= 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 \\ 10 &= 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4. \end{aligned}$$

Die Lösung mit Hilfe der Simplex-Methode lautet:

$$x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = x_4 = 0, G = 8.$$

Die Fixkosten sollen 4 GE betragen, der bereinigte Gewinn ist dann 4 GE.

Für die Berechnung der optimalen Investierung lautet das Modell:

$$\begin{aligned} G &= 2x_1 + 1x_2 - 2x_3 - 1,5x_4 - 4 = \text{Max ! , wenn} \\ 10 &= 1x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\ 10 &= 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 \\ 12 &= 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 . \end{aligned}$$

Die Lösung mit Hilfe der Simplex-Methode lautet :

$$G = 7, x_1 = 6, x_2 = 2, x_4 = 2, x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 .$$

Das errechnete Ergebnis bleibt gültig, solange die zugrunde gelegten Daten Gültigkeit besitzen. Wir formulieren zur Kontrolle das Modell von S. 70 , nachdem ein Zeitraum t verstrichen ist. Die Aufgabe, den Gewinn zu maximieren, lautet dann:

$$\begin{aligned} G &= 2x_1 + 1x_2 = \text{Max ! ,} \\ \text{wenn} \quad 10 &= 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4, \\ 20 &= 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 . \end{aligned}$$

Die Lösung lautet: $x_1 = 6, x_2 = 2, x_4 = x_3 = 0, G = 14$.

Nachdem die Produktionsabteilung II um zwei Maschineneinheiten erweitert wurde, lautet das optimale Produktionsprogramm:

6 ME Produkt A
2 ME Produkt B .

Die Fixkosten erhöhen sich um 3 GE auf 7 GE. Der bereinigte Gewinn beträgt somit 7 GE.

Das zur Optimallösung gehörende Simplex-Tableau hat folgendes Aussehen:

0	1	2	3	4	Gesamt
x_2	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	6
g_j	2	1	0	0	
z_j	2	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	
$g_j - z_j$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	

Exkurs : Die Vorschläge Albachs

Nach Fertigstellung der Arbeit erschienen von Albach zwei Beiträge ¹⁾, deren Inhalt sich mit dem hier zu behandelnden Problem berührt. In "Lineare Programmierung als Hilfsmittel betrieblicher Investitionsplanung" bezeichnet Albach mit

- d den Vektor der Bruttogewinne (Bruttogewinn = Überschuß des Erlöses über die variablen Kosten),
- x den Vektor der Produktionsmengen,
- D den Gesamtbruttogewinn,
- A die Matrix der zu den Produktionsverfahren gehörenden Verbrauchskoeffizienten,
- b den Vektor der vorhandenen Mengen an produktiven Faktoren,
- k den Vektor der Fixkostenbeträge je Aggregateinheit,
- y den Vektor der Investitionsvorhaben,
- C die Matrix der Wirkungen, welche die einzelnen Investitionsvorhaben auf die verfügbaren Mengen an produktiven Faktoren haben.

Mit diesen Bestandteilen formuliert Albach das folgende Modell:
Es ist

$$\begin{aligned} D &= d'x - k'y \quad 2) \text{ zu maximieren unter den Nebenbedingungen} \\ Ax + Cy &\leq b \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Ein Vergleich dieses Modells mit dem im Abschnitt K/3, S. 62 ff., entwickelten Modell zeigt zunächst: Albach geht von der Annahme aus, daß ein Investitionsfonds von unbegrenzter Höhe zur Verfügung steht. Nach dem Modell Albachs wird solange investiert, wie der Bruttogewinnzuwachs noch größer ist als der Fixkostenzuwachs. In der Praxis dürfte aber die in unserem Modell enthal-

¹⁾ Vgl. Albach, Horst: Lineare Programmierung als Hilfsmittel betrieblicher Investitionsplanung, in "Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung", Neue Folge, 12. Jg. Heft 9, Köln und Opladen 1960, S. 526 ff.; Rentabilität und Sicherheit als Kriterien betrieblicher Investitionsentscheidungen, in: "Zeitschrift für Betriebswirtschaft" 30. Jg. Wiesbaden 1960, Nr. 10, S. 583-589, Nr. 11, S. 673-682.

2) Mit d' und k' werden die Zeilenvektoren d und k bezeichnet.

tene zusätzliche Beschränkung der Investitionen durch einen begrenzten Investitionsfonds sehr oft vorhanden sein. Die Möglichkeit, daß die Investitionen durch das Überwiegen des Fixkostenzuwachses über den Bruttogewinnzuwachs gestoppt werden, ist in unserem Modell implizit enthalten. In diesem Fall wird der zur Verfügung stehende Investitionsfonds nicht voll ausgeschöpft (vgl. Punkt 6, S. 65).

Eine weitere Abweichung zwischen den beiden Modellen folgt aus der Definition der Matrix C bei Albach. Daraus ist zu entnehmen, daß zur Aufnahme in das zu planende Investitionsprogramm zunächst nur Projekte zugelassen sind, die eine Erweiterung des Leistungspotentials bei den bereits vorhandenen produktiven Faktoren bewirken. Von diesen Projekten werden darüberhinaus diejenigen ausgeschlossen, die die Einführung neuer Produktionsverfahren ermöglichen. Der damit verbundene Ausschluß des technischen Fortschritts gerade bei Investitionsplanungen, dürfte dazu führen, daß das Modell Albachs in vielen Fällen die Erfordernisse der Praxis nicht erfüllt.

Albach beschreibt noch eine zweite Form. Er geht davon aus, daß die technischen Eigenschaften eines Aggregates das Fertigungsverfahren und damit den Kosten- und den Ertragsstrom bestimmen. Nach Albach soll aus der Differenz zwischen den beiden Strömen der Rentabilitätsbeitrag, den ein Investitionsobjekt erbringt, errechnet werden, wobei der Rentabilitätsbeitrag als Differenz zwischen den auf den Planungszeitpunkt diskontierten Einnahmen und Ausgaben definiert ist. Albach bezeichnet mit

- y den Vektor der Investitionsmöglichkeiten,
 - s den Vektor der Rentabilitätsbeiträge der Investitionsobjekte,
 - E die Matrix der Anforderungen an die produktiven Faktoren,
 - S die Gesamtrentabilität des Unternehmens,
 - g den Vektor der vorhandenen produktiven Faktoren und formuliert damit das Modell $S = s'y = \text{Max} !$, wenn
- $$E y \leq g \quad \text{und} \quad y \geq 0.$$

In seinem zweiten Beitrag bezieht Albach eine Anzahl weiterer Bedingungen in die Betrachtung ein ¹⁾. Er erhöht also die Zeilen-

1) Vgl. Albach, Horst: Rentabilität und Sicherheit, S. 591 f.

zahl der Matrix E und die Zahl der Elemente des Vektors g und schreibt unter Verwendung neuer

Symbole $C = c'x = \text{Max } !$, wenn
 $Bx \leq m$ und $x \geq 0$.

An keiner Stelle findet sich bei Albach eine ausdrückliche Erklärung, daß die Gültigkeit seines Modells auf einen speziellen Sachverhalt beschränkt sein soll. Im Gegenteil, wenn er schreibt¹⁾ "..... die Aggregateinheit, die Kombination maschineller Einrichtungen zu einer Leistungseinheit bilden den Gegenstand der Planungsüberlegungen ...", so muß man schließen, daß die Planungsrechnung keineswegs auf unabhängige Investitionsprojekte beschränkt bleiben soll.

Tatsächlich besitzt das von Albach für so allgemeine Voraussetzungen formulierte Modell nur Gültigkeit für einen recht speziellen Sachverhalt. In der überwiegenden Zahl praktischer Investitionsplanungen kann der Vektor der Rentabilitätsbeiträge nicht konkretisiert werden. Er kann nämlich nur dann aufgestellt werden, wenn die Planung auf Projekte beschränkt bleibt, die unabhängig sind. Ein unabhängiges Projekt darf mit keinem der übrigen Projekte in einem Betriebssystem verbunden sein.

Der beschränkte Gültigkeitsbereich zeigt sich an dem Zahlenbeispiel Albachs²⁾. Albach geht darin von einem Betrieb mit drei Produktionsabteilungen A, B und C aus. Die Abteilung A ist produktionstechnisch selbständig und kann bei unserer Kritik zunächst außer Betracht bleiben. In der Abteilung B wird eine Produktart hergestellt. Vier Maschinen, die mit je einem besonderen Produktionsverfahren verbunden sind, stehen zur Verfügung. Bei drei von ihnen, Albach bezeichnet sie als die Maschinen (4), (6) und (7), wird eine Vorproduktart benötigt. Sie wird in der Abteilung C hergestellt, wo die Maschinen (8) und (9) mit je einem besonderen Produktionsverfahren zur Auswahl stehen. Jeder Maschine wird ein bestimmter Gewinnbetrag zugeordnet. Albach schreibt dazu: "Die laufenden Gewinne der Investitionsobjekte sind auf Grund einer Abteilungserfolgsrechnung ermittelt worden. Für die Zwirnabteilung, die lediglich ein Zwischenprodukt liefert, sind als

1) Albach, Horst: Lineare Programmierung als Hilfsmittel betrieblicher Investitionsplanung, S. 532.

2) Vergl. ders.: Rentabilität und Sicherheit, S. 671 ff.

innerbetriebliche Verrechnungspreise Marktpreise angesetzt worden. Die Kosten eines m. gezwirnten Garnes sind in die Ermittlung der laufenden Gewinne bei den Webstuhltypen in Abteilung B eingegangen¹⁾. So ist zum Beispiel in Abteilung B für die Maschine (4) ein Gewinn von 15000.--DM errechnet worden. Man muß nun fragen, welche Kosten wurden angesetzt, die, die entstehen, wenn das Vorprodukt mit dem Verfahren der Maschine (8) hergestellt wird oder die, die bei Verwendung des Verfahrens der Maschine (9) entstehen?

Offensichtlich ist es, da die Maschine (4) nicht unabhängig ist, nicht möglich, den Gewinnbeitrag eindeutig festzulegen. Damit stehen im Beispiel Albachs außer für die Maschine (4) auch für die Maschinen (6), (7), (8) und (9) de facto keine Gewinnbeiträge zur Verfügung. In Widerspruch zu seinem Beispiel hat Albach an anderer Stelle selbst festgestellt, daß bei betrieblicher Interdependenz die Wirtschaftlichkeit eines Projekts ganz davon abhängt, innerhalb welcher Kombination von Objekten es verwirklicht wird²⁾. Die (optimale) Kombination ist aber zunächst unbekannt, sie ist nicht Ausgangspunkt, sondern Ziel der Rechnung.

Das Verfahren Albachs weist einen weiteren Mangel auf. Albach errechnet aus den Gewinnbeiträgen der neun Investitionsobjekte seines Beispiels die jeweiligen Barwerte c_i und bildet dann die Gewinnfunktion

$$C = \sum_{i=1}^9 c_i x_i = \text{Max! } ^3).$$

Die Unbekannten x_i sind die anzuschaffenden Einheiten an Maschinen. Die zu maximierende Größe, der Gesamtrentabilitätsbeitrag, ist demnach abhängig von der angeschafften Kapazität. Das ist nur richtig, wenn die Entstehung von Leerkapazität verhindert wird. Albach erreicht das durch Einbau einer Gleichung: Kapazität der Abteilung B = Kapazität der Abteilung C⁴⁾.

Als Ergebnis seines Beispiels erhält Albach das optimale Investi-

1) Albach, Horst: Rentabilität und Sicherheit, S. 675.

2) Vgl. ders.: Wirtschaftlichkeitsrechnungen bei unsicheren Erwartungen, S. 55.

3) Vgl. ders.: Rentabilität und Sicherheit, S. 676.

4) Vgl. ebenda; S. 677.

tionsprogramm 4,205 Einheiten Maschine (1), 10,795 Einheiten Maschine (3), 5 Einheiten Maschine (4) und 1,667 Einheiten Maschine (9) anzuschaffen ¹⁾. Diese Lösung ist sicher nicht sehr sinnvoll. Albach läßt es jedoch dabei bewenden. Selbst wenn man über die Darlegungen Albachs hinausgeht und mit dem Gomory-Verfahren ²⁾ eine ganzzahlige Lösung erzielen wollte, könnte man - abgesehen von der dann besonders prekären Gefahr der Unlösbarkeit - kein aussagekräftigeres Ergebnis erzielen. Das Hinzufügen der Ganzzahligkeitsbedingung würde bei dem Ansatz Albachs bedeuten, daß die Projekte nur ganzzahlig angeschafft und genutzt werden dürfen. Eine solche Forderung ist in Anbetracht der relativen Unteilbarkeit der Produktionsanlagen wirklichkeitsfremd und läßt sich auch im Hinblick auf die zu maximierende Rentabilität nicht rechtfertigen. Aus den angeführten Gründen dürfte es daher nur bei Spezialfällen möglich sein, das Verfahren Albachs mit Erfolg anzuwenden.

C. Die optimale Investierung im mehrstufigen Modell

Der dem Linear Programming anhaftende short-run Charakter wurde bisher dadurch zu mildern versucht, daß den Modellen der Zeitraum von einem Jahr zugrunde gelegt wurde. Dabei wurde angenommen, daß der Investor für den Zeitraum jenseits dieser Schranke keine Informationen besitzt, die ihm hinreichend sicher erscheinen. Er ist daher gezwungen, wie bei den traditionellen Rechenverfahren, Konstanz der Daten zu unterstellen.

Besitzt der Investor jedoch weiter in die Zukunft reichende Erwartungen, so kann er diese in einem mehrstufigen oder multi-temporalen Modell verwerten ³⁾.

Das als

$$\bar{G} = \mathcal{S}^1 \mathcal{Q}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{M}^2 \mathcal{Q} \text{ formulierte Problem soll die erste}$$

1) Bei der Errechnung der Lösung waren wie bei jedem Linear-Programming Problem eine Anzahl einschränkender Bedingungen zu beachten. Vgl. ebenda, S. 676 ff.

2) Vgl. Abschnitt XII, S. 100.

3) Vgl. Wood, M.K., Geisler, M.A.: Development of Dynamic Models for Programm Planning, in Koopmans, a.a.O., S. 189 ff.

Periode eines mehrstufigen Modells darstellen. Dazu sind nur geringe Änderungen nötig ¹⁾. Die Matrix M wird zunächst um je eine Zeile und Spalte erweitert. Der Zeilenvektor J^1 bildet die $(k+h+2)$ te Zeile der neuen Matrix $M^{(1)}$. Als $(m+k+h+r+k+h+2)$ te Spalte wird der Vektor

$$a_{1i}$$

$$a_{2i}$$

$$\vdots$$

$$j = k + h + 2$$

$$i = m + k + h + r + k + h + 2$$

$$a_{ji}$$

angefügt, wobei $a_{ji} = -1$ und die übrigen Elemente den Wert Null haben.

Die zu dem neuen Spaltenvektor gehörende Tätigkeit wird definiert als "eine DM (Brutto-)Gewinn erzielen". Der Vektor b erhält als $(k+h+2)$ tes Element die beliebig kleine Größe ϵ_{k+h+1} . Der neue Zeilenvektor $J^{(1)}$ enthält $(m+k+h+r+k+h+1)$ Nullen und als $(m+k+h+r+k+h+2)$ tes Element eine Eins. Man kann nun schreiben:

$$\bar{g}^{(1)} = J^{(1)} \epsilon^{(1)}$$

$$b^{(1)} = M^{(1)} \epsilon^{(1)}$$

Der Ausdruck kann schematisch dargestellt werden:

$$\begin{array}{c} \bar{g}^{(1)} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \epsilon^{(1)} \\ \hline \end{array} - K_f \\ \\ \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \epsilon^{(1)} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \epsilon_{k+h+1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline J^1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

¹⁾ Die Symbole werden zum Zeichen, daß es sich um Größen der ersten Periode handelt, mit einem Index ⁽¹⁾ versehen.

Das schmale, liegende Rechteck stellt den Zeilenvektor $\mathcal{S}^{(1)}$ dar. Das skalare Produkt aus $\mathcal{S}^{(1)}$ und dem Vektor $\mathcal{U}^{(1)}$ bildet zusammen mit K_f , den Fixkosten des zu Beginn der ersten Periode vorhandenen Betriebssystems, den Gewinn der ersten Periode $\bar{G}^{(1)}$. Der bisherige Vektor $\mathcal{b}$ wird um das Element ϵ_{k+h+1} erweitert und bildet dann den Vektor $\mathcal{b}^{(1)}$. Die neue Matrix $\mathcal{M}^{(1)}$ wird gebildet von der bisherigen Matrix $\mathcal{M}$, einer zusätzlichen Spalte, die aus lauter Nullen besteht, einer zusätzlichen Zeile, die von dem bisherigen Vektor $\mathcal{S}^{(1)}$ gebildet wird und von -1 als rechtem unteren Diagonalelement.

In gleicher Weise werden die Daten der übrigen Perioden angeordnet. Soll das mehrstufige Modell zum Beispiel drei Perioden umfassen, so gilt für die Daten der zweiten und dritten Periode:

$$\begin{aligned}\bar{G}^{(2)} &= \mathcal{S}^{(2)} \mathcal{U}^{(2)} \\ \mathcal{b}^{(2)} &= \mathcal{M}^{(2)} \mathcal{U}^{(2)} \\ \bar{G}^{(3)} &= \mathcal{S}^{(3)} \mathcal{U}^{(3)} \\ \mathcal{b}^{(3)} &= \mathcal{M}^{(3)} \mathcal{U}^{(3)} .\end{aligned}$$

Die Dimensionen der Vektoren $\mathcal{b}^{(2)}$ und $\mathcal{b}^{(3)}$, $\mathcal{S}^{(2)}$ und $\mathcal{S}^{(3)}$, $\mathcal{U}^{(2)}$ und $\mathcal{U}^{(3)}$, sowie der Matrizen $\mathcal{M}^{(2)}$ und $\mathcal{M}^{(3)}$ brauchen mit den Dimensionen der entsprechenden Ausdrücke für die erste Periode nicht übereinzustimmen. Sie hängen ab von dem für die einzelne Periode angenommenen Handlungsspielraum des Investors. Die Zusammenfassung der drei Perioden zu einem Gesamtmodell kann schematisch so dargestellt werden:

$$g = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_{x_1}^{(1)} - K_f^{(1)} & + a_{x_2}^{(2)} - K_f^{(2)} & + a_{x_3}^{(3)} - K_f^{(3)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ b^{(3)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{(1)} & & \\ & \mathcal{M}^{(2)} & \\ & & \mathcal{M}^{(3)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \\ \vdots \\ x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} \\ x_3^{(3)} \end{matrix} \end{matrix}$$

$K_f^{(1)}, K_f^{(2)}, K_f^{(3)}$ sind die für die Periode 1 (Periode 2, Periode 3) anzusetzenden fixen Kosten des vor der Investierung vorhandenen Betriebssystems.

Die Elemente rechts von $\mathcal{M}^{(1)}$ bzw. oberhalb von $\mathcal{M}^{(2)}$ und $\mathcal{M}^{(3)}$ haben alle den Wert Null. Die Elemente unterhalb von $\mathcal{M}^{(1)}$ bzw. links von $\mathcal{M}^{(2)}$ und $\mathcal{M}^{(3)}$ können an einigen Stellen einen Wert verschieden von Null haben, und zwar dann, wenn eine Tätigkeit der Periode 1 oder 2, nicht nur in der Periode, in der sie ausgeführt wird, eine Auswirkung hat.

Durch das Verknüpfen der drei Perioden ist ein Gesamtmodell entstanden, dessen Matrix alle Handlungen umfaßt, die dem Investor im Verlauf von drei Perioden offenstehen. Die je eine Handlung beschreibenden Spaltenvektoren dieser Matrix sind von der

$$\text{Dimension } (r + s + t) \quad \begin{pmatrix} r = \text{Zeilenzahl von } \eta^{(1)} \\ s = \text{ " " " } \eta^{(2)} \\ t = \text{ " " " } \eta^{(3)} \end{pmatrix}$$

So hat zum Beispiel der Vektor der Tätigkeit "Anschaffung einer Einheit des Faktors j ($j = 1 \dots k$) in der ersten Periode" folgende Elemente verschieden von Null:

in der Zeile mit dem Element b_j (des Teilvektors $\mathcal{L}^{(1)}$)
das Element $-\Delta b_j^{(1)}$
" " " " " Element C (des Teilvektors $\mathcal{L}^{(1)}$)
das Element A_j
" " " " " Element ε_{k+h+1} (des Teilvektors $\mathcal{L}^{(1)}$)
das Element $-\Delta Kf_j$
" " " " " entsprechenden
Element (des Teilvektors $\mathcal{L}^{(2)}$)
das Element $-\Delta Kf_j^{(2)}$
" " " " " entsprechenden
Element (des Teilvektors $\mathcal{L}^{(3)}$)
das Element $-\Delta Kf_j^{(3)}$
" " " " " Element b_j (des Teilvektors $\mathcal{L}^{(2)}$)
das Element $-\Delta b_j^{(2)}$
" " " " " Element b_j (des Teilvektors $\mathcal{L}^{(3)}$)
das Element $-\Delta b_j^{(3)}$.

Die Elemente $-\Delta b_j^{(1)}$, $-\Delta b_j^{(2)}$, $-\Delta b_j^{(3)}$ und $-\Delta Kf_j^{(1)}$, $-\Delta Kf_j^{(2)}$, $-\Delta Kf_j^{(3)}$ können verschiedene Werte haben. So kann zum Beispiel $\Delta b_j^{(1)} = \frac{1}{2} \Delta b_j^{(2)}$ sein, wenn angenommen wird, daß die Installationsdauer $1/2$ Periode beträgt.

Das Element b_j braucht in den drei Vektoren $\mathcal{L}^{(1)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$ und $\mathcal{L}^{(3)}$ ebenfalls nicht gleich zu sein, denn die Kapazität der zu Beginn der ersten Periode vorhandenen Einheiten des Faktors j kann sich im Laufe der Zeit ändern.

Es wird häufig zweckmäßig sein, die Tatsache zu berücksichtigen, daß die Daten der Teilmatrizen nicht gleichwertig sind. Je weiter die Periode einer Matrix in der Zukunft liegt, desto größer wird die Unsicherheit sein, mit der einige ihrer Elemente behaftet sind. Dies, und die Tatsache, daß die Gewinne der einzelnen Perioden ebenfalls nicht gleichwertig sind, kann dadurch berücksichtigt werden, daß die Glieder des Maximanden durch Faktoren gewichtet werden.

Die Verknüpfung der Teilmatrizen zu einem multitemporalen Modell führt zu einer long-run Betrachtung. Der Lösungsvektor μ stellt ein Aktionsprogramm dar, welches auf mehrere Perioden abgestellt ist und dadurch die erwartete zukünftige Entwicklung berücksichtigt. Das Aktionsprogramm kann von Periode zu Periode den neu-gewonnenen Informationen angepaßt werden.

Wird zum Beispiel am Ende der Periode 1 das Aktionsprogramm neu berechnet, so fallen die Tätigkeiten der Periode 1 als Vergangenheitsgrößen aus der Rechnung heraus.

Zahlenbeispiel eines multitemporalen Modells:

	Konstante		T ä t i g k e i t						
	Spalte	1	2	3	4	5	6	7	8
	2400	0,5	1	2	-2000	0	0	1	0
	2400	2	1,5	0	0	-2200	0	0	1
<u>Periode 1</u> :	2400	0	0,5	1	0	0	-2100	0	0
	ϵ_4	0	0	0	0	0	0	0	0
	ϵ_5	0	0	0	0	0	0	0	0
	ϵ_6	0	0	0	0	0	0	0	0
	ϵ_7	350	250	300	-60000	-80000	-50000	0	0
	1500000	0	0	0	320000	400000	350000	0	0

Die Eintragungen unter der Bezeichnung "Konstante Spalte" haben folgende Bedeutung: Die Zeilen 1-3 geben die Kapazitäten der vorhandenen Maschinen gemessen in Betriebsstunden an. Die Zeilen 4-6 sind für eventuell anzuschaffende Maschinen vorgesehen. In Zeile 8 ist der Betrag eingetragen, der für Investitionen in der Periode 1 zur Verfügung steht.

Für die Periode 1 hat der Betrieb die Auswahl zwischen den Tätigkeiten 1-22. Die Bedeutung der Tätigkeiten:

- Tätigkeit 1 Herstellung einer ME des Gutes A. Dabei werden verbraucht 0,5 Betriebsstunden an Maschine M_I , 2 Betriebsstunden an Maschine M_{II} und 0 Betriebsstunden der Maschine M_{III} . Die Maschinen M_I , M_{II} und M_{III} stehen für je 2400 Betriebsstunden zur Verfügung. Der Erlös aus dem Verkauf einer ME A übersteigt die variablen Kosten um DM 350.--.
- Tätigkeit 2 Herstellung einer ME des Gutes B. Die Bedeutung der Zahleneintragen folgt aus den Erläuterungen zu Tätigkeit 1.
- Tätigkeit 3 Herstellung einer ME des Gutes C. Vgl. die Tätigkeit 2.
- Tätigkeit 4 Anschaffung einer Maschine M_I . Durch die erforderliche Installationsdauer steht die Maschine während der Periode 1 nur für 2000 Betriebsstunden zur Verfügung. Der bisherige Fixkostenbetrag von DM 480 000.-- erhöht sich durch die Anschaffung um DM 60 000.--. Die Anschaffungskosten betragen DM 320 000.--. Es steht ein Investitionsfonds von DM 1 500 000.-- zur Verfügung.
- Tätigkeit 5 Anschaffung einer Maschine M_{II} . Vgl. die Erläuterungen zu Tätigkeit 4.
- Tätigkeit 6 Anschaffung einer Maschine M_{III} . Vgl. die Erläuterungen zu Tätigkeit 4.
- Tätigkeit 7 1 Betriebsstunde von M_I ungenutzt lassen.
- Tätigkeit 8 1 Betriebsstunde von M_{II} ungenutzt lassen.
- Tätigkeit 9 1 Betriebsstunde von M_{III} ungenutzt lassen.
- Tätigkeit 10 Anschaffung einer Maschine M_{IV} . Diese Maschine ist bisher nicht im Betrieb vorhanden. Sie steht unter Berücksichtigung der Installationsdauer während der Periode 1 für 2000 Betriebsstunden zur Verfügung. Die Fixkostenerhöhung beträgt DM 100 000.--. Die Anschaffungskosten betragen DM 600 000.--.

- Tätigkeit 4 Eine Maschine M_I , die in Periode 1 angeschafft wurde, steht in Periode 2 mit 2400 Betriebsstunden zur Verfügung.
- Tätigkeit 5 Das Entsprechende gilt für 1 Maschine M_{II} .
- Tätigkeit 6 " " " " 1 " M_{III} .
- Tätigkeit 10 " " " " 1 " M_{IV} .
- Tätigkeit 11 " " " " 1 " M_V .
- Tätigkeit 12 " " " " 1 " M_{VI} .
- Tätigkeit 21 Der nicht investierte Betrag des Investitionsfonds steht in Periode 2 für Investitionen wieder zur Verfügung.
- Tätigkeit 22 Die Hälfte des Gewinns der Periode 1 steht in Periode 2 für Investitionen zur Verfügung.
- Tätigkeit 23 entspricht Tätigkeit 1 in Periode 1. Es wird mit einem Erlösrückgang von DM 20.-- gerechnet.
- Tätigkeit 24 entspricht Tätigkeit 2. Erlösrückgang DM 10.--.
- Tätigkeit 25 entspricht Tätigkeit 3.
- Tätigkeit 26 " " 4.
- Tätigkeit 27 " " 5.
- Tätigkeit 28 " " 6.
- Tätigkeit 29 " " 7.
- Tätigkeit 30 " " 8.
- Tätigkeit 31 " " 9.
- Tätigkeit 32 " " 10.
- Tätigkeit 33 " " 11.
- Tätigkeit 34 " " 12. Es wird damit gerechnet, daß sich die Anschaffungskosten um DM 30000.-- erhöhen.
- Tätigkeit 35 entspricht Tätigkeit 13.
- Tätigkeit 36 " " 14. Erlösrückgang 10.--DM
- Tätigkeit 37 " " 15. " 20.--DM
- Tätigkeit 38 " " 16. " 20.--DM
- Tätigkeit 39 " " 17. " 10.--DM
- Tätigkeit 40 " " 18.
- Tätigkeit 41 " " 19.
- Tätigkeit 42 " " 20.
- Tätigkeit 43 " " 21.
- Tätigkeit 44 " " 22.

Die zweite und dritte Periode sowie die folgenden Perioden werden auf die gleiche Art verknüpft. Aus der Lösung interessieren zu Beginn der ersten Periode neben dem Gewinn vor allem die Niveaus der Tätigkeiten 1-21. Die Lösung von Hand zu berechnen ist praktisch unmöglich. Mit Unterstützung maschineller Hilfsmittel ist die Errechnung der Optimallösung jedoch ohne Problematik. Es kann daher an dieser Stelle auf die Zahlenwerte der 44 Variablen verzichtet werden, zumal der Zweck des Beispiels vor allem darin bestand, zu zeigen, wie Gegenwartsdaten und erwartete Zukunftsentwicklung verbunden werden und wie daraus ein langfristiges Optimalprogramm gewonnen werden kann.

Teil 3

X. Die Anpassungsfähigkeit des Linear Programming an die Bedingungen der Praxis

A. Die Bedingungen bei der rechentechnischen Ausführung

Es wurde in unserem Beispiel von einem Sachverhalt ausgegangen, wie er in dieser einfachen Form in der Praxis nur selten vorkommen wird. Die Umstände, denen sich der Investor bei seinen Investitionsentscheidungen gegenüber sieht, sind im allgemeinen viel komplizierter.

Was den Umfang des Problems anbelangt, so ist die Frage nach der Anpassungsfähigkeit an praktische Bedingungen schnell beantwortet. In unserem Beispiel wurde die optimale Mengenkombination aus wenigen Tätigkeiten ausgewählt und dabei brauchten ebenfalls nur wenige einschränkende Bedingungen beachtet zu werden. Die Linear-Programming-Technik bietet aber gerade bei Problemen, die infolge ihres Umfanges das Auffinden eines Maximums erheblich erschweren, besondere Vorteile. " ... it may be extremely difficult to determine the additional income that will result from any one investment or from any combination of investments without the use of a systematic computing technique" ¹⁾.

Bei umfangreichen Problemen ist eine Berechnung von Hand allerdings nicht mehr möglich. Es wird der Einsatz von Rechenanlagen nötig. Die Leistungsfähigkeit dieser Maschinen stellt eine Grenze dar, die nur in extremen Fällen erreicht werden dürfte.

Im Zusammenhang mit dem Einsatz von Rechenanlagen kann auf einen anderen Vorteil des Linear Programming hingewiesen werden. Bisher wurden die beiden Möglichkeiten betrachtet, daß der Investor über die zukünftige Entwicklung entweder überhaupt keine Erwartungen besitzt und deshalb konstante Daten unterstellt, oder daß er sichere Erwartungen besitzt und mit einem mehrstufigen Modell arbeitet. In der Praxis wird es vielfach so sein, daß der Investor eine ganze Reihe zukünftiger Entwicklungen für möglich hält

1) Henderson, A., Schlaifer, R.: Mathematical Programming, in: "Harvard Business Review", Vol. 32, 1954, Nr. 3, S. 93.

und daß er sich ein Bild von den quantitativen Auswirkungen machen möchte. "In the case of investment decisions ... the relevant data are not so much the facts of the immediate present as they are forecasts of conditions which will prevail in the future. An investment decision cannot be made rationally unless it is possible to explore its profitability under a variety of assumptions about future costs and markets. It is already difficult enough to make the necessary forecasts; without the use of a systematic technique for calculation, full exploration of their implications is virtually impossible ..." ¹⁾. Das Linear Programming-Modell eignet sich gut für die mehrfache Durchrechnung ²⁾. Der Vorteil liegt darin, daß die Hauptarbeit getan ist, sobald das eigentliche Problem formuliert ist. Der Einbau der Parameteränderungen und die Berechnung der jeweiligen Lösung ist eine Routineangelegenheit ³⁾. Die Möglichkeit, einfach und schnell eine große Zahl Daten bereitstellen und verarbeiten zu können, ist von allgemeinem Vorteil. "Although LP was developed to help solve problems of using scarce resources as effectively as possible, it helps to solve the data and information problem of the businessman as well" ⁴⁾.

B. Die Linearität der Beziehungen

Es wurde bisher in unserem Beispiel von linearen Beziehungen ausgegangen. Die Zielfunktion und die Nebenbedingungen traten

-
- 1) Henderson, A., Schlaifer, R.: a.a.O., S. 94.
 - 2) "Once a basic plan is arrived at through linear programming, the basic plan can be reevaluated for changing conditions. Plans can be laid for several sets of conditions to find out how to prepare best for possible future changes" (Ferguson, R., Sargent, L.: a.a.O., S. 12).
 - 3) "Once a problem has been defined and set up for solution, the computational procedures can be delegated to clerical personnel or programmed on computers". (Ferguson, R., Sargent, L.: a.a.O., S. 15.)
 - 4) Ebenda, S. 3. Vgl. auch Charnes, A., Cooper, W., Mellon, B.: "A Model for Programming and Sensitivity Analysis in an integrated Oil Company, in: Econometrica", Vol. 22, Chicago 1954, S. 194 f.

als lineare Gleichungen auf. Wir wollen uns zunächst nur mit der Zielfunktion befassen und uns fragen, welchen Sachverhalt eine lineare Zielfunktion beschreibt. Die Zielfunktion drückt die Abhängigkeit des Gewinnes von der Menge der produzierten und verkauften Güter aus. Eine lineare Zielfunktion sagt aus, daß der Gewinnbeitrag eines Gutes von den Gewinnbeiträgen der anderen Güter unabhängig ist. Wir können daher unsere Betrachtung auf ein Gut beschränken und die anderen Güter ausschließen. Es ist zum Beispiel der Gewinnbeitrag des Gutes A $350 \cdot x_1$. Das heißt, der Gewinnbeitrag ist der Produktionsmenge proportional.

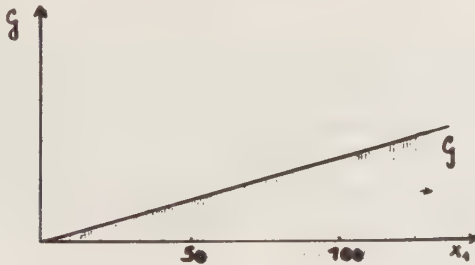


Abb. 7

Der Gewinn ist laut Definition (vgl. S. 45) die Differenz zwischen Erlösen (E) und variablen Kosten (K_v). In einer graphischen Darstellung müssen die Gewinnsäulen aus Abbildung 7 in Abbildung 8 bei der gleichen Produktmenge zwischen Erlös- und Kostenlinie "passen". Das ist der Fall, wenn Erlös- und Kostenlinie Gerade sind, das heißt, wenn Grenzerlös und Grenzkosten konstant sind.

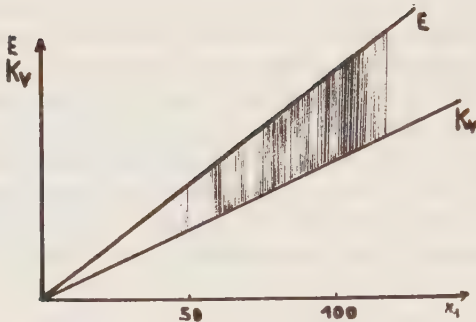


Abb. 8

Die Verwendung einer linearen Zielfunktion bedeutet daher, daß die Güter zu konstanten Grenzkosten (bzw. zu konstanten variablen Stückkosten) hergestellt und zu konstanten Grenzerlösen (bzw. zu konstanten Stückerlösen) verkauft werden können. Wenn zur Vereinfachung angenommen wird, daß der Charakter der Kostenentwicklung und der Erlösentwicklung sich für den relevanten Produktmengenbereich nicht ändert, dann sind die folgenden Kosten- und Erlösentwicklungen möglich:

1. Kostenverlauf mit steigenden Grenzkosten,
2. Kostenverlauf mit konstanten Grenzkosten,
3. Kostenverlauf mit fallenden Grenzkosten,
4. Erlösverlauf mit steigendem Grenzerlös,
5. Erlösverlauf mit konstantem Grenzerlös,
6. Erlösverlauf mit fallendem Grenzerlös.

Außer der Paarung konstante Grenzkosten/konstanter Grenzerlös sind formal weitere 8 Paarungen möglich. Praktisch können die 3 Paarungen, in denen das Merkmal "steigender Grenzerlös" vorkommt, ausgeschieden werden. Von den verbleibenden 5 Paaren führen die Paare

steigende Grenzkosten/konstanter Grenzerlös				
"	"	/	fallender Grenzerlös	
konstante	"	/	"	"
fallende	"	/	"	"

jeweils zu einer konkaven Gewinnkurve ¹⁾.

1) Bei dem Paar fallende Grenzkosten/fallender Grenzerlös nur dann, wenn die Änderungsrate des Grenzerlöses größer ist als die Änderungsrate der Grenzkosten.

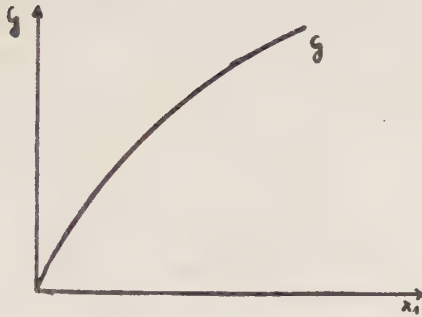


Abb. 9

Ein solcher Gewinnverlauf ist eine notwendige Bedingung dafür, daß ein Problem, obwohl die Zielfunktion nichtlinear ist, mit Linear Programming bearbeitet werden kann ¹⁾. Die zugrundeliegenden nichtlinearen Kosten- und/oder Erlöskurven werden durch ein Polygon approximiert. Dadurch wird die Gewinnkurve ebenfalls ein Polygon. Als Beispiel greifen wir die Paarung steigende Grenzkosten (K') konstanter Grenzerlös (E') heraus:

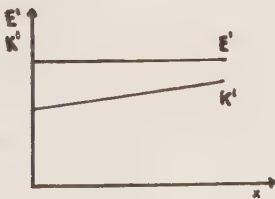


Abb. 10

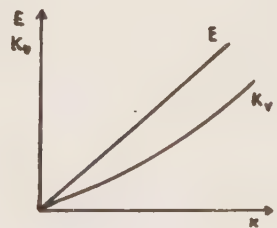


Abb. 11

1) Zur Begründung vgl. S. 94 .

Bei Wahl genügend kleiner Bereiche kann die Entwicklung der variablen Stückkosten durch eine Treppenfunktion hinreichend genau beschrieben werden.



Abb. 12

Die zugehörige Kostenkurve $K_v^{(p)}$ hat folgende Gestalt:

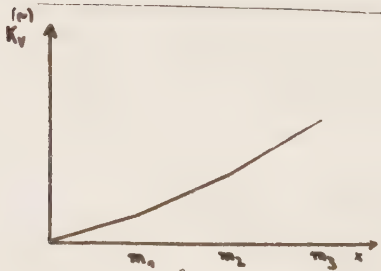


Abb. 13

Der analytische Ausdruck lautet:

$$K_v^{(p)} = ax_1 + b(x_2 - m_1) + c(x_3 - m_2). \quad \begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq m_1 \\ m_1 &\leq x_2 \leq m_2 \\ m_2 &\leq x_3 \leq m_3 \end{aligned}$$

Der Gewinn ist gegeben durch:

$$G = (e - a)x_1 + (e - b)(x_2 - m_1) + (e - c)(x_3 - m_2)$$

$$e = \frac{E}{x} = E'$$

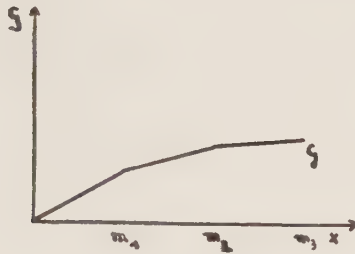


Abb. 14

Die konkave Gewinnfunktion ist durch ein Polygon approximiert worden.

Beispiel: Es wird wieder von unserem Modellbetrieb ausgegangen (vgl. S. 50 ff.). Die vorhandenen Anlagen werden optimal genutzt, und es wird erwogen eine Maschine IV anzuschaffen. Mit dieser Maschine kann das Gut D hergestellt werden.

Für 1 ME D werden verbraucht:

0,7	Betriebsstunden bei Maschine	I
1,0	"	II
0,4	"	III
2,0	"	IV .

Der Erlös für 1 ME D beträgt DM 1 200.--. Die variablen Stückkosten betragen bis 1000 ME/Jahr ($=x_7$) je DM 750.--, über 1000 ME bis 1400 ME ($=x_8$) je DM 800.--, über 1400 ME bis 2400 ME ($=x_9$) je DM 900.--. Mit diesen Angaben wird folgendes Modell erhalten:

Es ist zu maximieren

$$G = 350x_1 + 250x_2 + 300x_3 + (1\,200 - 750)x_7 + (1\,200 - 800)x_8 + (1\,200 - 900)x_9$$

unter Beachtung der Bedingungen:

bisherige Produktionsmöglichkeiten |

$$\begin{aligned}
 2\ 400 &= 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0,7x_7 + 0,7x_8 + 0,7x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
 2\ 400 &= 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 1x_8 + 1x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
 2\ 400 &= 0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0,4x_7 + 0,4x_8 + 0,4x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
 1\ 000 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 2x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 1x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
 400 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 2x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 1x_{11} + 0x_{12} \\
 1\ 000 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 2x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 1x_{12} .
 \end{aligned}$$

Durch Aufspaltung der Tätigkeit "Herstellung des Gutes D" in 3 Tätigkeiten und durch Hinzufügung der entsprechenden Nebenbedingungen wurde es möglich, den Sachverhalt durch ein normales Linear Programming-Modell darzustellen ¹⁾.

Es ist durch die konkave Gestalt der Gewinnkurve sichergestellt, daß die Kapazität der Maschine IV in der richtigen Richtung ausgenutzt wird, nämlich von Null beginnend und gegen die volle Ausnutzung bei 2 400 Betriebsstunden laufend.

Bei einer konvexen Gewinnkurve verläuft die Ausnutzung der Kapazität von der Vollaussnutzung gegen Null, weil die kurz vor Erreichen der Kapazitätsgrenze hergestellten Mengeneinheiten die gewinngünstigsten sind. Dadurch kann eine Optimallösung unsinnig sein. Die noch verbleibende Paarung (vgl. S. 90) fallende Grenzkosten/konstanter Grenzerlös kann mit Convex Programming nicht bearbeitet werden, weil sie zu einer konvexen Gewinnkurve führt.

Jetzt wenden wir uns den Nebenbedingungen zu.

Wir fragen uns auch hier wieder, welcher Sachverhalt durch eine lineare Nebenbedingung beschrieben wird. Die Gleichung (vgl. S. 46)

$$200 = 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

sagt aus, daß der Verbrauch an Betriebsstunden für eine bestimmte

1) Dieses Verfahren bezeichnet Vaszsonyi als Convex Programming (Vaszsonyi, A.: Scientific Programming in Business and Industry, New-York 1958, S. 194 ff.) Vgl. aber den Gebrauch des Ausdrucks Convex Programming bei Beckmann, M.: a.a.O., S. 87 f.

Tätigkeit proportional und von den Niveaus anderer Tätigkeiten unabhängig ist. Die Annahme limitationaler Produktionsfaktoren führt dazu, daß der Verbrauch pro Einheit einer Tätigkeit durch die Art der Tätigkeit und durch die zur Verfügung stehenden Produktionsfaktoren eindeutig bestimmt ist. Diese Eindeutigkeit ist nicht mehr vorhanden, wenn beispielsweise der Verbrauch pro Einheit einer Tätigkeit von der Niveausumme aller Tätigkeiten abhängt. Sobald ein konkreter Sachverhalt Nebenbedingungen in der Form nichtlinearer Funktionen erfordert, kann mit Linear Programming nicht mehr gearbeitet werden. In diesen Fällen und in den Fällen mit nichtlinearer Zielfunktion, die nicht mit Convex Programming behandelt werden können, besteht die Möglichkeit die Methoden des Nonlinear Programming zu verwenden. Für diese gegenüber dem Linear Programming allgemeinere Programming-Methode ist zwar bisher kein Lösungsverfahren bekannt, welches systematisch zum gesuchten Maximum (oder Minimum) führt, aber man kann eine Reihe von mathematischen Bedingungen angeben, die von der gesuchten Lösung erfüllt sein müssen ¹⁾.

In der Praxis wird es oft vorkommen, daß bei Bestimmung der gewinnmaximalen Produktmengen bei gegebenen Kapazitäten außer den Kapazitäten noch andere Beschränkungen beachtet werden müssen. So können für einzelne Produktmengen Grenzen existieren, die nicht unter- oder überschritten werden dürfen. Soweit solche Begrenzungen durch Aktionen des Betriebes beeinflußt werden können, wird es aufschlußreich sein das "absolute" Optimalprogramm zu kennen. "Furthermore, when it is necessary to deviate from the best program, the manager can evaluate the cost or penalty involved. He will then have an idea of what he forgoes if he elects to follow a course of action other than that indicated by LP" ²⁾.

Die Errechnung eines "relativen" Optimalprogrammes soll an einem Beispiel gezeigt werden. Wir gehen von unserem Modellbetrieb aus (vgl. S. 54) und nehmen an, daß die vorhandenen Anlagen optimal genutzt werden. Der Betrieb stellt jährlich 1200 ME A und 900 ME C

1) Vgl. Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R.: a.a.O., S. 186 ff, S. 502 ff.

2) Ferguson, R., Sargent, L.: a.a.O., S. 12.

her (vgl. S. 54). Der Betrieb hat die Möglichkeit einen Vertrag abzuschließen, in dem er sich als Zulieferer verpflichtet, jährlich 2000 ME A zu liefern. Die Kapazität soll erweitert werden durch eine Maschine des Typs II mit folgenden Daten:

Anschaffungskosten:	DM 500 000.--,
Inanspruchnahme bei Herstellung	1 ME A : 1,5 Bst.,
" " "	1 ME B : 0,5 " .

Für die Herstellung des Produktes C wird die Maschine nicht benötigt.

Durch den Einsatz der Maschine verringern sich die variablen Kosten der auf ihr erzeugten Produkte:

pro ME A um	DM 10.--
" ME B um	DM 60.-- .

Installationsdauer und Schrottwert werden vernachlässigt.

Als wirtschaftliche Lebensdauer wird der Zeitraum von 5 Jahren angenommen. Die Antwort auf die Frage, wie die Sollmenge von 2000 ME A auf die neue Maschine und auf die Maschine I zu verteilen ist und welche Produktmengen hergestellt werden müssen, damit alle Maschinen optimal genutzt werden, ist selbst bei diesem einfachen und auf wenige Parameter beschränkten Sachverhalt mit den herkömmlichen Rechenverfahren nicht einfach zu finden. Mit Hilfe von Linear Programming ist die Berechnung im wesentlichen eine Routineangelegenheit. Das vorhandene Modell wird um die hinzukommenden Produktionsmöglichkeiten erweitert und die Bedingung hinzugefügt, daß die Anzahl der Mengeneinheiten A, die mit der Maschine I hergestellt werden (x_1), plus die Anzahl der Mengeneinheiten A, die mit der neuen Maschine hergestellt werden (x_7), nicht kleiner als 2000 sein dürfen:

$$x_1 + x_7 \geq 2000.$$

Wir erhalten:

$$G = 350x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 360x_7 + 310x_8 = \text{Max!}$$

unter Beachtung der Bedingungen:

$$2400 = 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0,5x_7 + 1x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0,5x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1,5x_7 + 0,5x_8 + 1x_9 + 0x_{10}$$

$$2000 = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 + 0x_9 - 1x_{10}$$

Die Tätigkeiten 7 und 8 bezeichnen die neuen Herstellungsverfahren für die Produkte A und B. Tätigkeit 9 entspricht den Tätigkeiten 4, 5 und 6. x_{10} , das Niveau der fiktiven Tätigkeit 10, gibt an, wieviel ME C über die Menge von 2000 ME hinaus produziert werden.

Die Berechnung mit der Simplex-Methode liefert die Optimallösung

$$x_1 = 1200, x_6 = 1800, x_7 = 1200, x_8 = 1200, x_{10} = 400,$$

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_9 = 0. \text{ Dazu gehört das Simplex-Tableau:}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ge- samt
x_8	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	1200
x_1	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1200
x_6	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{20}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	1800
x_7	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	1	0	$\frac{4}{5}$	0	1200
x_{10}	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	0	$\frac{4}{5}$	-1	400
g_j	350	250	300	0	0	0	360	310	0	0	
z_j	350	405	456	228	118	0	360	310	164	0	
$g_j - z_j$	0	-155	-156	-228	-118	0	0	0	-164	0	

Es werden 2400 ME A und 1200 ME B produziert. Bei Maschine III bleiben 1800 Betriebsstunden gleich 75 % der Kapazität ungenutzt. Der Gewinn beträgt:

$$G = 350 \cdot 1200 + 360 \cdot 1200 + 310 \cdot 1200 \\ = 1\,224\,000.$$

Der Fixkostenbetrag soll 480 000 (vgl. S. 54) + 100 000 + 20 000 (sonst. Fixkosten) = 600 000 sein.

Der bereinigte Gewinn ist

$$1\,224\,000 - 600\,000 = 624\,000.$$

Vor der Investition betrug er $690\,000 - 480\,000 = 210\,000$.

Es wird ein Gewinnzuwachs von DM 414 000.-- erzielt.

Das entspricht einer Verzinsung von 165,6 %.

$$\left(\frac{414000 \cdot 100}{250000} \right) \cdot 1).$$

Es soll jetzt noch der andere Fall betrachtet werden, bei dem eine oder mehrere Variable durch obere Grenzen beschränkt sind. Die Möglichkeit, obere Grenzen berücksichtigen zu können, ist vor allem von Interesse, wenn es sich bei den projektierten Investitionen um Anlagen geringer Teilbarkeit handelt und die Absatzmöglichkeiten begrenzt sind. Wir bleiben bei dem Sachverhalt von S. 96, nehmen aber statt des Liefervertrages an, daß der Absatz über die bisherige Menge von 1200 ME A hinaus nicht mehr gesteigert werden kann. Die Aufgabe lautet dann: Es ist zu maximieren:

$$G = 350x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 360x_7 + 310x_8 \quad \text{unter}$$

Beachtung der Bedingungen:

$$2400 = 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0,5x_7 + 1x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0,5x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$$

$$2400 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1,5x_7 + 0,5x_8 + 1x_9 + 0x_{10}$$

$$1200 = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 1x_{10} \quad .$$

Das Optimalprogramm ist $x_1 = 200$, $x_5 = 2000$, $x_6 = 1500$, $x_7 = 1000$, $x_8 = 1800$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_9 = x_{10} = 0$. Es werden 1200 ME A und 1800 ME B produziert. Die Kapazität der Maschine II wird mit ca. 17 % und die Kapazität der Maschine III mit ca. 63 % ausgenutzt. Der Gewinn ist:

$$G = 350 \cdot 200 + 360 \cdot 1000 + 310 \cdot 1800 = 988\,000.$$

Der Zuwachs an bereinigtem Gewinn ist:

$$988\,000 - 600\,000 - 210\,000 = 178\,000. \quad \text{Das entspricht einer Verzinsung von } 71,2 \% \left(\frac{178000 \cdot 100}{250000} \right) \cdot 2).$$

1) Der interne Zinsfuß beträgt 99,55 % (vgl. S. 56f.).

2) Der interne Zinsfuß beträgt rund 47,6 % (vgl. S. 56f.).

Die hier angedeuteten Anpassungsmöglichkeiten reichen allerdings keineswegs aus, alle Situationen zu erfassen. Das ist schon - wie erwähnt - wegen der erforderlichen Linearität der Nebenbedingungen nicht der Fall. Durch geschickte Wahl der Tätigkeiten und der Nebenbedingungen wird es in vielen Fällen möglich sein, ein Modell zu formulieren, welches den Sachverhalt hinreichend genau beschreibt.

XI. Die duale Formulierung (Dual) eines Linear-Programming Modells als Mittel der Investitionsplanung

A. Form und ökonomische Deutung des Duals

"Wir haben bereits festgestellt, daß Linear Programming auf einem mathematischen Problem begründet ist. Es ist nun der Fall, daß mathematische Linear Programming Probleme in Paaren auftreten; jedes mathematische Linear-Programming Problem ist eng verbunden mit einem anderen Problem, das sein 'Dual' genannt wird. Diese Feststellung wäre nicht mehr als eine interessante mathematische Kuriosität, wenn es nicht die Tatsache gäbe, daß, wenn ein wirtschaftliches Problem als Linear Programming Problem formuliert werden kann, es im allgemeinen ein verwandtes wirtschaftliches Problem gibt, welches dem 'Dual' entspricht"¹⁾.

Für die Darstellung des Zusammenhanges zwischen Primal (= Originalformulierung) und Dual verwenden wir zum leichteren Verständnis unser Modell von S. 44 ff. Dies lautete:

$$\begin{aligned} G &= 350x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = \text{Max!} \\ 200 &= 0,5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ 200 &= 2x_1 + 1,5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 \\ 200 &= 0x_1 + 0,5x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 \end{aligned} \quad (1)$$

Wir können das Problem anders formulieren, indem wir statt der Variablen x die Variable u einführen und schreiben:

1) Dorfmann, R., Samuelson, P., Solow, R.: a.a.O., S. 39.

$$G' = 200u_1 + 200u_2 + 200u_3 = \text{Min!}$$

$$350 \leq 0,5u_1 + 2u_2 + u_3 \quad (2')$$

$$250 \leq 1u_1 + 1,5u_2 + 0,5u_3 \quad (2'')$$

$$300 \leq 2u_1 + u_2 + 1u_3 \quad (2''')$$

$$0 \leq 1u_1 + u_2 + u_3 \quad (2''''')$$

$$0 \leq 0u_1 + 1u_2 + 0u_3 \quad (2''''''')$$

$$0 \leq 0u_1 + 0u_2 + 1u_3 \quad (2''''''''')$$

Der formale Umwandlungsvorgang ist leicht zu überblicken. Die bisherigen Beschränkungswerte bilden die Koeffizienten der neuen Zielfunktion, und die bisherigen Koeffizienten der Zielfunktion bilden die neuen Beschränkungen.

Die Koeffizienten der bisherigen Variablen x_1 bilden die Koeffizienten der neuen Variablen u_1 , u_2 und u_3 usw. Aus einer Maximierungsaufgabe wurde eine Minimierungsaufgabe, hierbei gilt: $G_{\text{Max}} = G'_{\text{Min}}$. Aus der Zielfunktion G' ersieht man, daß den Betriebsstunden als den Kapazitätseinheiten der Originalformulierung Größen zugeordnet werden sollen, und zwar so, daß die Summe der Produkte aus den gesuchten Größen und der zugehörigen Anzahl Kapazitätseinheiten ein Minimum wird. Die gesuchten Größen können jedoch nicht beliebig klein gewählt werden. Die Nebenbedingungen verlangen, daß, wenn die gesuchten Größen mit der zugehörigen, für eine Tätigkeitseinheit ¹⁾ verbrauchten, Anzahl Betriebsstunden multipliziert und die Produkte addiert werden, die Summe nicht kleiner ist als der Einheitsgewinn der Tätigkeit.

Der Verbrauch an Betriebsstunden für die Herstellung einer Einheit des Produktes A beträgt z.B.:

0,5	Betriebsstunden bei Maschine I,
2	" " " " II.

Die erste Nebenbedingung des Duals fordert, die Größen u_1 , u_2 und u_3 so zu wählen, daß $0,5u_1 + 2u_2 + u_3$ nicht kleiner wird als der Einheitsgewinn von DM 350.--. Daraus erkennt man auch den Charakter der zuzuordnenden Größen: Es handelt sich um Werte, die wie die Einheitsgewinne der Originalformulierung in DM gemessen werden.

1) Mit Tätigkeit ist eine Tätigkeit der Originalformulierung gemeint.

Die Tätigkeiten 1 bis 3 führen zu unterschiedlichen Einheitsgewinnen. Die Kapazitäten der Maschinen I, II und III sind so auf die Tätigkeiten zu verteilen, daß die "Wertsumme" der drei Maschinen ein Minimum wird.

Die Maschinen bilden in unserem Beispiel einen knappen Produktionsfaktor. Sie können für verschiedene Tätigkeiten verwendet werden, die unterschiedliche Gewinnbeiträge liefern.

Die Betriebsstunde jeder der drei Maschinen muß so bewertet werden, daß bei optimaler Verwendung der Maschinen der Wert der drei Maschinenkapazitäten gleich dem Gewinn ist und jede ungünstigere Verwendung zu einer größeren Wertsumme führt ¹⁾. Stellt sich heraus, daß die Kapazität einer Maschine nicht voll in Anspruch genommen wird, so erhält sie den Wert Null. "Ein nicht voll genutzter Faktor ist als freies Gut anzusehen und kann keine Rente beanspruchen" ²⁾.

Die rechentechnische Behandlung eines Duals unterscheidet sich von der eines Primals nicht. Die Nebenbedingungen (vgl. S. 100) werden in Gleichungen verwandelt, indem die Variablen u_4 , u_5 und u_6 eingeführt werden. Diese sind mit den Koeffizienten $a_{i,j}$ verbunden (i bezeichnet die Zeile, j die Spalte). Es ist

$a_{1,4} = a_{2,5} = a_{3,6} = -1$. Alle anderen Koeffizienten sind Null. Die Bedeutung der Variablen u_j ($j = 4, 5, 6$) soll für $j = 5$ erläutert werden: Erscheint in der Optimallösung des Duals u_5 mit einem positiven Wert, so besagt das, daß in der Optimallösung des Primals $x_2 = 0$, das Produkt A also nicht produziert wird. Umgekehrt ist $u_5 = 0$, wenn das Produkt A produziert wird.

Ein positiver Wert für u_5 gibt an, um wieviel DM sich der Gewinn verringert, wenn die Produktion des Gutes A aufgenommen und eine Einheit produziert wird. Die Berechnung des Duals mit Hilfe der

1) Vgl. Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R.; a.a.O., S. 43 f.: "This system of valuation is reminiscent of the operation of a competitive market in which resource users are forced by competition to offer to resource owners the full value to which their resources give rise, while competition among the resource owners drives down resource prices to the minimum consistent with this limitation".

2) Beckmann, M.: a.a.O., S. 19.

Simplex-Methode führt zu folgendem Tableau:

	0	1	2	3	4	5	6	Gesamt
1	u_1	1	0	1/2	0	0	-1/2	150
2	u_2	0	1	-1/8	-1/2	0	1/8	137,5
3	u_5	0	0	-3/16	-3/4	1	-5/10	106,25
4	k_j	200	200	200	0	0	0	
5	z_j	200	200	75	-100	0	-75	
6	$k_j - z_j$	0	0	125	100	0	75	

Da $k_j - z_j$ in keiner Spalte negativ ist, ist die Optimallösung erreicht. Sie lautet: Eine Kapazitätseinheit von Maschine I hat den Wert $u_1 = \text{DM } 150.--$, eine Kapazitätseinheit von Maschine II hat den Wert $u_2 = \text{DM } 137,50$, eine Kapazitätseinheit von Maschine III hat den Wert $u_3 = 0$. $u_5 = 106,25$ besagt, daß die Herstellung einer Mengeneinheit B den Gewinn um DM 106,25 mindert (vgl. Zeile 6, Spalte 2 des Simplex-Tableaus 2, S. 49). Die Optimallösung des Primals (vgl. Gesamtspalte des Simplex-Tableaus 2, S. 49) kann in Zeile 6 abgelesen werden. Die ökonomische Deutung der dualen Formulierung führt zu der Feststellung, daß bei dualer Formulierung der wertmäßige Aspekt (in unserem Beispiel Zurechnung von Werten an die Maschinenkapazitäten) im Vordergrund steht, während bei Originalformulierung vor allem die mengenmäßige Seite betrachtet wird (optimale Produktmengenkombination).

B. Die Bedeutung des Duals für die Berechnung der Wirtschaftlichkeit eines Projekts (einstufiges Modell)

Die Optimallösung unseres Beispiels von S. 44 ff. lautete je nach der Formulierung:

$$G'_{\text{Max}} = \text{DM } 350.-- \cdot 100 + \text{DM } 300.-- \cdot 75 = \text{DM } 57\,500.--$$

$$G'_{\text{Min}} = \text{DM } 150.-- \cdot 200 + \text{DM } 137,50 \cdot 200 = \text{DM } 57\,500.--$$

1) Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R., a.a.O., S. 166, deuten diese Größe wie folgt: "Dieser Nettoertrag, das Maximum, das unter den für das Unternehmen gegebenen Umständen zu erzielen ist, ist ein Maß für den Firmenwert".
Zu dem Begriff Firmenwert vgl. Münstermann, Hans: Firmenwert, in: "Handwörterbuch der Betriebswirtschaft", 3., völlig neu bearbeitete Auflage, Stuttgart 1958.

Die Zurechnung von Renten an die fixen Produktionsfaktoren führte in unserem Beispiel dazu, daß der Maschine I ein Wert von $200 \cdot \text{DM } 150.-- = \text{DM } 30\,000.--$ zuerkannt wurde. Für Maschine II wurde ein Wert von $200 \cdot \text{DM } 137,50 = \text{DM } 27\,500.--$ errechnet. Diese Angaben beziehen sich auf einen Monat. Auf ein Jahr bezogen lauten sie $\text{DM } 360\,000.--$ beziehungsweise $\text{DM } 330\,000.--$. Es liegt nahe, einen solchen Wert in eine Relation zu den Anschaffungskosten zu bringen und daraus einen Schluß auf die Wirtschaftlichkeit einer Maschine zu ziehen. Tatsächlich finden sich in der Literatur Hinweise für ein solches Vorgehen. So bei Dorfman-Samuelson-Solow (a.a.O., S.184): "Eine fixe Anlagekapazität sollte beispielsweise nur erweitert werden, wenn der mit Hilfe von Linear Programming errechnete Wert ihrer Dienste zumindest so groß ist wie der Kapitalwert, wie er aus den Anschaffungskosten und der wirtschaftlichen Lebensdauer errechnet wurde". Auch den Ausführungen von Beckmann (a.a.O., S.30) kann man diesen Gedanken entnehmen: "Im long run müssen die Effizienzpreise (das sind die Anlagenwerte, Langer) mit den aus den Marktpreisen für die betreffenden Maschinen kalkulierten Kostenpreisen annähernd übereinstimmen..." und weiter unten: "Allerdings braucht die Bewertung von Produktionsanlagen im short run ... mit dem tatsächlichen Marktpreis dieser Anlagen nicht übereinzustimmen". Eine auf solchen Überlegungen fußende Verwendung des Anlagenwertes für Investitionsentscheidungen führt jedoch nur in Grenzfällen zu brauchbaren Aussagen für den Investor.

In unserem Beispiel hatte die Maschine I einen Wert von $\text{DM } 360\,000.--$ pro Jahr. Es läßt sich feststellen, in welcher Weise der Wert einer Kapazitätseinheit von dem Umfang der zur Verfügung stehenden Kapazität abhängt. Auf unser Beispiel übertragen heißt das, es läßt sich feststellen, wie der Wert einer Betriebsstunde der Produktionsabteilung I (gebildet von Maschinen I mit einer Kapazität von je 2400 Betriebsstunden) von der Gesamtzahl Betriebsstunden in Produktionsabteilung I abhängt. Wenn man in der Originalformulierung

$$G = 350x_1 + 250x_2 + 300x_3$$

Menge erweitert werden können. Es handelt sich deshalb im allgemeinen nicht um die Hinzufügung einer Kapazitätseinheit, sondern es geht um die Hinzufügung einer - je nach der Teilbarkeit - mehr oder weniger großen Anzahl Kapazitätseinheiten. Häufig läßt darum der Wert einer Kapazitätseinheit keinen Schluß auf den Wert des projektierten Objekts zu. Es bleibt zu bemerken, daß eine Treppenfunktion nach Abb. 15 je nach der konkreten Situation auch mehrere Sprungstellen aufweisen kann. Ferner kann die erste Sprungstelle dicht an der (durch die senkrechte Achse beschriebenen) Ausgangskapazität liegen.

Man kann zu der Bedeutung des Dual-Wertes für Investitionsüberlegungen sagen:

1. Eine Verwendung ist nur möglich bei der geplanten Erweiterung einer Kapazität durch die Anschaffung gleichartiger Anlagen. Sobald ein Projekt es gestattet, neue Tätigkeiten (= verbesserte Produktionsverfahren) auszuführen, bedeutet die Anschaffung keine Erweiterung einer bestehenden Kapazität.
2. Der Dual-Wert erlaubt nur, eine negative Entscheidung zu treffen. Wird angenommen, der Investor plane, die Produktionsabteilung I um 2400 Betriebsstunden = 1 Maschine I zu erweitern, so ist der Wert $U_1 = 2400 \cdot u_1 = 2400 \cdot \text{DM } 150.-- = \text{DM } 360\,000.--$. Der Anschaffungspreis sei A DM, die geschätzte Lebensdauer n Jahre, der Schrott wert 0 DM. Der Investor rechne mit einem Jahreszinssatz von p %. Der Fixkostenzuwachs pro Jahr abzüglich Abschreibung betrage F DM.

Wenn
$$U_1 < \frac{A}{n} + F + \frac{p}{100} \cdot \frac{A}{2} = R,$$

kann die Investitionsmöglichkeit ohne jede weitere Berechnung ausgeschieden werden, da schon die günstigste Möglichkeit, die Annahme, daß u_1 für weitere 2400 Betriebsstunden konstant bleibt, nicht ausreicht, den Kapitaldienst zuzüglich Fixkostenerhöhung abzudecken. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Daten des vorhandenen Modells als für die Investitionsdauer gültig angenommen werden. Nach den Dualwerten scheidet eine Investition einer gleichartigen Anlage auch dann aus, wenn $U = 0$ (d.h., wenn die vorhandene Kapazität nicht voll genutzt wird). Wenn dagegen $U > R$, ist eine Beurteilung

mit Hilfe des Dual-Wertes nicht möglich. Es kann bei Hinzufügung einer einzigen Kapazitätseinheit u auf Null sinken (und daher $U = 0$ werden). Wenn die relative Unteilbarkeit der Anlage die Hinzufügung einer großen Anzahl Kapazitätseinheiten erfordert, kann die geplante Investition unwirtschaftlich sein, obwohl $U > R$. U kann deshalb nicht dazu dienen, die Wirtschaftlichkeit einer Investition zu beurteilen. Die Größe, auf die es ankommt, ist die Veränderung V des Wertes der Zielfunktion. Über V kann aber nicht mehr gesagt werden, als daß

$$360\,000 \geq V \geq 0 \quad ^1).$$

In all diesen Fällen ist es daher nötig, den Wert der Zielfunktion für die Optimallösung nach der Erweiterung zu berechnen und die Abweichung gegenüber dem bisherigen Wert festzustellen. Das ist aber nichts anderes als eine Feststellung der Änderung der Gesamtwirtschaftlichkeit (vgl. S. 51 ff.).

In den zuletzt besprochenen Fällen bedeutet die Kenntnis der Dual-Werte daher keine zusätzliche Information für den Investor ²⁾.

XII. Ganzzahligkeit bei Linear-Programming-Lösungen

Die Modelle, mit denen die optimale Investierung eines Betrages bestimmt wird, sind so aufgebaut, daß von der gleichzeitigen Berücksichtigung aller vorgesehenen Investitionsobjekte ausgegangen und die Entscheidung im Zusammenhang mit den jeweils sich ergebenden Produktionsmöglichkeiten getroffen wird. Das ist ein besonderer Vorteil des Linear-Programming gegenüber den herkömmlichen Methoden der Investitionsrechnung. Allerdings ist es möglich, daß die Lösung eines derartigen Linear-Programming-Modells zu gebrochenen Werten führt. Das ist bei der Errechnung der optimalen Investierung besonders störend, denn eine Lösung, die die Forderung enthält 2,3849 Einheiten einer Maschine N, 3,4556

1) Bei Anschaffung einer Maschine M_I . Vgl. Beckmann, M.: a.a.O., S. 44.

2) Dies gilt nicht für andere Fragestellungen (z.B. für makroökonomische Untersuchungen). "Die Effizienzpreise sind in diesem Zusammenhang keineswegs fiktiver Natur, sondern haben eine echte Marktbedeutung, nämlich die von Nachfragepreisen" (Beckmann, M.: a.a.O., S. 46).

Einheiten einer Maschine 0 usw. zu investieren, besitzt im allgemeinen keine Aussagekraft. Es ist auch nicht möglich, von einer solchen Lösung auf die vermutlich optimale ganzzahlige Lösung zu schließen.

Das Problem, ganzzahlige Lösungen zu erzielen, war lange Zeit nicht voll befriedigend gelöst. Die zur Verfügung stehenden Verfahren konnten entweder nur für spezielle Modelle eingesetzt werden ¹⁾ oder sie blieben darauf beschränkt, die Suche nach der optimalen ganzzahligen Lösung zu systematisieren ²⁾. Einen wesentlichen Fortschritt brachten die Arbeiten von Gomory ³⁾. Gomory stellt Verfahren bereit, mit deren Hilfe es möglich ist, aus der gebrochenen Optimallösung eines Linear Programming-Problems in einer endlichen Zahl von Schritten die ganzzahlige Optimallösung zu errechnen.

Da von den Arbeiten Gomorys in deutscher Sprache bisher nur wenig publiziert wurde, soll das, was für die hier betrachteten Linear Programming-Modelle von Bedeutung ist, kurz dargestellt werden. Ein Linear Programming-Modell, allgemein formuliert, besteht aus der Zielfunktion

$$G = a_{0,0} + \sum_{j=1}^n a_{0,j} x_j \quad \text{und den}$$

$$\text{Bedingungen} \quad a_{1,0} \geq \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \quad i = 1, 2, \dots, m$$

-
- 1) Vgl. Dantzig, G.B., Fulkerson, D.R., Johnson, S.M.: Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman-Problem, in: "Operations Research", Vol. 2, 1954, S. 393 ff.; diess.: On a Linear-Programming, Combinatorial Approach to the Traveling-Salesman Problem, in: "Operations Research, The Journal of the Operations Research Society of America", Vol. 7, Baltimore 1959; Dantzig, G.B.: Discrete-Variable Extremum Problems, in: "Operations Research", Vol. 5, 1957, S. 266 ff.
 - 2) Vgl. Markowitz, H., Manne, A.S.: On the Solution of Discrete Programming-Problems, in: "Econometrica", Vol. 25, Chicago 1957, S. 84 ff.; Krelle, W.: Ganzzahlige Programmierungen. Theorie und Anwendungen in der Praxis, in: "Unternehmensforschung", Band 2, Heft 4, Würzburg 1958, S. 161 ff.
 - 3) Gomory, Ralph, E.: An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, in "Princeton-IBM Mathematics Research Project, Technical Report No. 1", November 17, 1958, Princeton University; derss.: All-Integer Programming Algorithm, IBM Research Center, Yorktown Heights, New York, Research Report RC - 189, January 29, 1960.

mit der Aufgabe, nichtnegative Werte für die x_j zu finden, die die Zielfunktion maximieren. Dazu kann die zusätzliche Bedingung kommen, daß die x_j -Werte ganzzahlig sein müssen. Zielfunktion und Bedingungen können auch in der folgenden Form geschrieben werden, wobei durch Einführung von Schlupfvariablen die Ungleichungen in Gleichungen überführt werden:

$$(1) \quad \begin{aligned} G &= a_{0,0} + \sum_{j=1}^n -a_{0,j}(-x_j) \\ x_{n+1} &= a_{1,0} + \sum_{j=1}^n a_{1,j}(-x_j) \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Für alle Probleme, die in dieser Weise formuliert werden können, liefert das Verfahren von Gomory eine ganzzahlige Optimallösung (sofern eine solche existiert). Die einzige Einschränkung besteht darin, daß die Koeffizienten $a_{i,j}$ ganze Zahlen sein müssen. Das läßt sich über gemeinsame Vielfache und durch zweckmäßige Definition der Tätigkeiten immer bewerkstelligen, so daß das von Gomory entwickelte Verfahren für die in dieser Arbeit betrachteten Modelle volle Gültigkeit besitzt.

Gomory geht von der Überlegung aus, daß im Falle einer gebrochenen Optimallösung dem Modell verschärfende Bedingungen beigelegt werden müssen, die eine ganzzahlige Lösung erzwingen. Die Auswahl geeigneter Ungleichungen bildet das Kernstück der Untersuchungen Gomorys. Es soll hier nicht auf die mathematische Ableitung im einzelnen eingegangen, sondern nur die Ausgangsbeziehung erwähnt werden: Für eine ganzzahlige Lösung $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ gilt die Beziehung

$$X \equiv 0 \pmod{1} \quad ^1).$$

Darauf stützt Gomory seine weiteren Untersuchungen. Aus der unendlich großen Anzahl möglicher zusätzlicher Bedingungen, die alle zusammen eine Gruppe M bilden sollen, findet Gomory die kleinere Gruppe F , die nur noch eine endliche Zahl Bedingungen enthält. Alle übrigen Bedingungen von M können auf die Bedingungen, die in F enthalten sind, zurückgeführt werden. Die Bedingun-

1) Die Reihe 3, 6, 9... ist $\equiv 0 \pmod{3}$, das heißt, jedes Element der Reihe ist ohne Rest durch drei teilbar. Die Reihe 4, 7, 10... ist dann $\equiv 1 \pmod{3}$. Aus $X \equiv 0 \pmod{1}$ folgt, daß die Elemente x_j um eine ganze Zahl differieren.

gen von F wiederum sind ganzzahlige Kombinationen einer oder mehrerer Zeilen des Linear Programming-Modells. Für die Berechnung einer ganzzahligen Lösung ist es jedoch nicht nötig alle zu F gehörenden Ungleichungen zu kennen. Es genügt, auf jeder Stufe sich aus einer Zeile des Modells eine Ungleichung abzuleiten. Wie dies geschieht, soll nun an einem Zahlenbeispiel erläutert werden. Wir greifen auf das Beispiel von S. Toff zurück. Dort lautete die Aufgabe, für ein Betriebssystem das Optimalprogramm zu bestimmen, wobei im Rahmen eines Investitionsfonds auch Investitionen möglich sein sollen :

$$\begin{aligned} G &= 2x_1 + 1x_2 - 2x_3 - 1,5x_4 - 4 = \text{Max !, wenn} \\ 10 &= 1x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\ 10 &= 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 \\ 12 &= 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7. \end{aligned}$$

Die Tätigkeiten 1 und 2 waren als Herstellung des Gutes A beziehungsweise B, die Tätigkeiten 3 und 4 als Investierung der Maschine I beziehungsweise II definiert. Die Tätigkeiten 5, 6 und 7 waren fiktiv. Es waren von den Maschinen I und II je 10 Kapazitätseinheiten vorhanden und es stand ein Investitionsfonds von 12 Geldeinheiten zur Verfügung.

Die Lösung lautete:

$$G = 7, x_1 = 6, x_2 = 2, x_4 = 2, x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0.$$

Sie war also ganzzahlig. Wir wollen die Ausgangsdaten geringfügig ändern und annehmen, die Herstellung einer Mengeneinheit des Gutes A erfordere 2 Kapazitätseinheiten der Maschine I statt bisher einer Kapazitätseinheit. Außerdem soll bei Investierung einer Einheit von Maschine I ein Kapazitätswachstum von 6 Einheiten statt bisher 5 Einheiten erzielt werden. Der Investitionsfonds erhöhe sich von 12 auf 15 Geldeinheiten. Damit erhält man folgendes Modell:

$$\begin{aligned} G &= 2x_1 + 1x_2 - 2x_3 - 1,5x_4 - 4 = \text{Max !, wenn} \\ 10 &= 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\ 10 &= 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 \\ 15 &= 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7. \end{aligned}$$

Durch entsprechende Ordnung der Gleichungsglieder erhält man daraus die Form (1), S. 108.

$$G = -4 - 2(-x_1) - 1(-x_2) + 2(-x_3) + 1,5(-x_4) = \text{Max } 1, \text{ wenn}$$

$$(2) \begin{aligned} x_5 &= 10 + 2(-x_1) + 2(-x_2) - 6(-x_3) + 0(-x_4) \\ x_6 &= 10 + 3(-x_1) + 1(-x_2) + 0(-x_3) - 5(-x_4) \\ x_7 &= 15 + 0(-x_1) + 0(-x_2) + 4(-x_3) + 6(-x_4). \end{aligned}$$

Durch die Änderung der Daten ist es möglich, daß die Optimallösung gebrochene Werte enthält. Für die sich dann anschließende Errechnung der ganzzahligen Optimallösung ist es zweckmäßig, die duale Simplex - Methode zu verwenden ¹⁾. Wir verwenden von Anfang an die duale Simplex - Methode, um eine eventuelle spätere Umordnung des Tableaus zu vermeiden. Aus (2) erhält man das Tableau

		$(-x_1)$	$(-x_2)$	$(-x_3)$	$(-x_4)$	
	G	-4	-2	-1	+2	+1,5
	x_5	10	+2	+2	-6	+0
(3)	x_6	10	+3	+1	+0	-5
	x_7	15	+0	+0	+4	+6

Dieses Tableau ist so zu verstehen, daß die Lösung von den Schlupfvariablen x_5 , x_6 und x_7 mit den Werten $x_5 = 10$, $x_6 = 10$, $x_7 = 15$ gebildet wird und die Variablen x_1 , x_2 , x_3 und x_4 aus der Lösung ausgeschlossen sind, das heißt, sie haben alle den Wert Null. Solange einer der Koeffizienten der ausgeschlossenen Variablen in der Zeile 0, das sind in unserem Beispiel die Elemente -2, -1, +2, +1,5 (allgemein die Elemente $a_{0,j}$, $j = 1,2,3,4$) negativ ist, ist die Optimallösung nicht erreicht.

1) Das mit der dualen Simplex - Methode verbundene Tableau erlaubt eine besonders klare Darstellung des Rechenganges. Vgl. Lemle, C.E.: The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem, in: "Naval Research Logistics Quarterly", Vol. 1, Nr. 1, 1954; Beale, M.L.: An Alternative - Method for Linear Programming, in: "Proceedings of the Cambridge Philosophical Society", Vol. 50, S. 513 ff, 1954.

Dazu kommt die Forderung, daß die Optimallösung in der Spalte 0 keine negativen Werte enthalten darf ($a_{i,0} \geq 0, i = 1, 2, 3$). In (3) sind die Elemente $a_{0,1} = -2$ und $a_{0,2} = -1$ negativ, das heißt, Aufnahme der Tätigkeit 1 mit einer Einheit in die Lösung erhöht den Gewinn um 2 Einheiten. Entsprechend erhöht die Einheit der Tätigkeit 2 den Gewinn um eine Einheit. Für die Festlegung der neu aufzunehmenden Tätigkeit gilt; es wird die Tätigkeit aufgenommen, bei der die Gewinnerhöhung / Einheit am größten ist ($\min a_{0,j}$). Das ist Tätigkeit 1. Tätigkeit 1 wird in die Lösung aufgenommen und gegen eine bisher in der Lösung vertretene Tätigkeit ausgetauscht. Aus der Lösung scheidet die Tätigkeit aus, die mit der relativ kleinsten Menge in der Lösung enthalten ist ($\min \frac{a_{i,0}}{a_{i,1}}$). Das ist die der Schlupfvariablen x_6 entsprechende $a_{1,1}$ fiktive Tätigkeit.

Es gilt allgemein : Solange die Lösung nicht optimal ist, das heißt, solange nicht $a_{0,j} \geq 0, j \geq 1$, wähle die Spalte j_0 , in der das erste Element a_{0,j_0} am kleinsten ist. Unter den positiven Elementen dieser Spalte wähle dasjenige, für das das Verhältnis $\frac{a_{i,0}}{a_{i,j_0}}$ den kleinsten absoluten Wert besitzt.

Bezeichne dieses Element mit a_{10,j_0} . Tausche die Spalte j_0 gegen die Zeile i_0 aus. Errechne die neuen Koeffizienten $a'_{1,j}$ mit Hilfe folgender Formeln:

$$a'_{1,j} = a_{1,j} - \left(a_{10,j} \frac{a_{1,j_0}}{a_{10,j_0}} \right); i \neq i_0, j \neq j_0$$

$$a'_{10,j} = \frac{a_{10,j}}{a_{10,j_0}}; j \neq j_0$$

$$a'_{i,j_0} = \frac{-a_{i,j_0}}{a_{10,j_0}}; i \neq i_0$$

$$a'_{10,j_0} = \frac{1}{a_{10,j_0}}$$

Die Anwendung dieser Formeln liefert das Tableau (4) :

	$(-x_6)$	$(-x_2)$	$(-x_3)$	$(-x_4)$
G	$\frac{20}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$2 - \frac{11}{6}$
x_5	$\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{10}{3}$
(4) x_1	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$0 - \frac{5}{3}$
x_7	15	0	0	4
				6

Die Optimallösung ist noch nicht erreicht. Nach den angegebenen Kriterien muß Tätigkeit 4 gegen die fiktive Tätigkeit der Schlupfvariablen x_5 ausgetauscht werden. Um den Austausch Spalte 3 / Zeile 1 zu kennzeichnen, haben wir das Element $a_{1,3} = \frac{10}{3}$ eingerahmt. Entsprechend werden wir bei den folgenden Tableaus verfahren. Nach Umrechnung der Elemente von (4) erhält man das Tableau (5):

	$(-x_6)$	$(-x_2)$	$(-x_3)$	$(-x_5)$
G	$\frac{27}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{13}{10}$
(5) x_4	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{5}$
x_1	5	0	1	$-\frac{3}{2}$
x_7	9	$\frac{6}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{74}{5} - \frac{9}{5}$

Auch diese Lösung ist nicht optimal. Nach Umrechnung erhält man das Tableau (6).

	$(-x_6)$	$(-x_2)$	$(-x_7)$	$(-x_5)$
G	$\frac{43}{148}$	$\frac{15}{37}$	$\frac{7}{37}$	$\frac{13}{148}$
x_4	$\frac{155}{74}$	$-\frac{2}{37}$	$\frac{4}{37}$	$\frac{5}{74}$
x_1	$\frac{505}{74}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{19}{37}$	$\frac{15}{74}$
x_3	$\frac{45}{74}$	$\frac{3}{37}$	$-\frac{6}{37}$	$\frac{5}{74}$

Die Optimallösung ist erreicht. Sie lautet: $x_1 = \frac{505}{74}$, $x_3 = \frac{45}{74}$, $x_4 = \frac{155}{74}$. Es sind demnach $\frac{505}{74}$ Einheiten von Produkt A herzustellen. Das ist aber nur möglich, wenn der Investitionsfonds zur Anschaffung von $\frac{45}{74}$ Einheiten Maschine I und $\frac{155}{74}$ Einheiten Maschine II verwendet wird. Diese Lösung ist nicht ganzzahlig. Das Modell muß um eine Bedingung erweitert werden, durch die die bisherige Lösung in Richtung auf eine ganzzahlige Lösung gedrängt wird. Gomory weist nach, daß solche Bedingungen aus den Reihen des Tableaus gewonnen werden können. Jedes Element a des Tableaus kann man sich gebildet denken aus $n + f$, wobei n eine ganze Zahl und $0 \leq f \leq 1$ ist.

Für die zusätzlichen Bedingungen sind nur die gebrochenen Anteile f von Bedeutung. Dabei muß beachtet werden, daß ein negatives a durch Addition von $(+n)$ positiv zu machen ist ¹⁾.

Aus dem Tableau (6) erhält man in der

Zeile 1 die gebrochenen Anteile	$\frac{7}{74}$	$\frac{35}{37}$	$\frac{4}{37}$	$\frac{9}{74}$	$\frac{3}{37}$
Zeile 2 die gebrochenen Anteile	$\frac{61}{74}$	$\frac{9}{37}$	$\frac{19}{37}$	$\frac{15}{74}$	$\frac{5}{37}$
Zeile 3 die gebrochenen Anteile	$\frac{45}{74}$	$\frac{3}{37}$	$\frac{31}{37}$	$\frac{5}{74}$	$\frac{65}{74}$

In der Form

$$x_8 = -\frac{7}{74} - \frac{35}{37}(-x_6) - \frac{4}{37}(-x_2) - \frac{9}{74}(-x_7) - \frac{3}{37}(-x_5)$$

$$x_9 = -\frac{61}{74} - \frac{9}{37}(-x_6) - \frac{19}{37}(-x_2) - \frac{15}{74}(-x_7) - \frac{5}{37}(-x_5)$$

$$x_{10} = \frac{45}{74} - \frac{3}{37}(-x_6) - \frac{31}{37}(-x_2) - \frac{5}{74}(-x_7) - \frac{65}{74}(-x_5)$$

bilden die gebrochenen Anteile drei Bedingungen, von denen jede als zusätzliche Bedingung dienen kann ²⁾. Für die Frage, welche der Bedingungen dem Tableau hinzugefügt werden soll, gibt es mehrere Kriterien. Wir verwenden folgende Daumenregel:

Wähle in dem Tableau die Spalte mit dem kleinsten Element in der

1) Aus $-3 \frac{3}{8}$ wird durch Addition von $(+4) \frac{5}{8}$, aus $-2 \frac{4}{5}$ wird durch Addition von $(+3) \frac{1}{5}$.

2) Die übrigen Bedingungen der Gruppe F erhält man durch lineare Kombination. Da die Kenntnis dieser Bedingungen für die praktische Rechnung nicht erforderlich ist, wird nicht näher darauf eingegangen. Stehen mehrere Anteile zur Wahl, so kann willkürlich eine von den zu diesen Anteilen gehörenden Zeilen genommen werden.

Zeile 0 ($\min a_{0,j}, j \geq 1$). Dann wähle die Zeile der gebrochenen Anteile, die den kleinsten von Null verschiedenen Anteil in jener Spalte hat ¹⁾. Diese Zeile füge dem Tableau hinzu.

Das Ergebnis dieser Operationen ist das Tableau (7). Damit der Rechengang besser verfolgt werden kann, sind bei den nachfolgenden Tableaus die gebrochenen Anteile besonders aufgeführt. Die als zusätzliche Bedingung ausgewählte Zeile wurde eingerahmt.

	$(-x_6)$	$(-x_2)$	$(-x_7)$	$(-x_5)$						
G	5	$\frac{43}{148}$	$\frac{15}{37}$	$\frac{7}{37}$	$\frac{13}{148}$	$\frac{29}{74}$				
x_4		$\frac{155}{74}$	-	$\frac{2}{37}$	$\frac{4}{37}$	$\frac{9}{74}$	$\frac{3}{37}$	$\frac{7}{74}$	$\frac{35}{37}$	$\frac{6}{74}$
x_1		$\frac{505}{74}$		$\frac{9}{37}$	$\frac{19}{37}$	$\frac{15}{74}$	$\frac{5}{37}$	$\frac{61}{74}$	$\frac{9}{37}$	$\frac{19}{74}$
(7) x_3		$\frac{45}{74}$		$\frac{3}{37}$	-	$\frac{6}{37}$	$\frac{5}{74}$	-	$\frac{9}{74}$	$\frac{45}{74}$
x_{10}		$\frac{45}{74}$	-	$\frac{3}{37}$	-	$\frac{31}{74}$	-	$\frac{5}{74}$	-	$\frac{65}{74}$

Die nunmehr um eine Variable erweiterte Lösung ist nicht mehr optimal, da x_{10} mit einem negativen Wert enthalten ist. Die Variable x_{10} muß aus der Lösung genommen werden und gegen eine nicht der Lösung zugehörige Variable ausgetauscht werden. Analog zu der auf S. 111 erwähnten Auswahlregel wird jetzt die Variable in die Lösung aufgenommen, deren Aufnahme den kleinsten relativen Verlust bringt, das heißt, für die das Verhältnis $\frac{a_{0,i}}{a_{10,j}}$ den kleinsten absoluten Wert annimmt.

Man erhält das Tableau

	$(-x_6)$	$(-x_{10})$	$(-x_7)$	$(-x_5)$						
G	5	$\frac{4,75}{31}$	$\frac{12}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{2,25}{31}$	$\frac{6}{31}$				
x_4		$\frac{62,5}{31}$	-	$\frac{2}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{3,5}{31}$	-	$\frac{1}{31}$	$\frac{0,5}{31}$	$\frac{29}{31}$
x_1		$\frac{200}{31}$		$\frac{6}{31}$	$\frac{19}{31}$	$\frac{5}{31}$	-	$\frac{12,5}{31}$	$\frac{14}{31}$	$\frac{6}{31}$
(8) x_3		$\frac{22,5}{31}$		$\frac{3}{31}$	-	$\frac{6}{31}$	$\frac{2,5}{31}$	$\frac{1,5}{31}$	$\frac{22,5}{31}$	$\frac{3}{31}$

1) Stehen mehrere Anteile zur Wahl, so kann willkürlich eine von den zu diesen Anteilen gehörenden Zeilen genommen werden.

$$\begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{22.5}{31} \quad \frac{3}{31} \quad - \quad \frac{37}{31} \quad \frac{2.5}{31} \quad \frac{32.5}{31} \quad \boxed{\frac{22.5}{31} \quad \frac{3}{31} \quad \frac{25}{31} \quad \frac{2.5}{31} \quad \frac{1.5}{31}} \\
 x_{14} \quad -\frac{22.5}{31} \quad -\frac{3}{31} \quad - \quad \boxed{\frac{25}{31}} \quad - \frac{2.5}{31} \quad - \frac{1.5}{31}
 \end{array}$$

$$(-x_6) \quad (-x_{14}) \quad (-x_7) \quad (-x_5)$$

(9)

$$\begin{array}{l}
 G \quad \frac{123.75}{25} \quad \frac{9}{25} \quad \frac{7}{25} \quad \frac{1.25}{25} \quad \frac{4.5}{25} \\
 x_4 \quad \frac{47.5}{25} \quad -\frac{2}{25} \quad \frac{4}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad - \frac{1}{25} \quad \frac{22.5}{25} \quad \frac{23}{25} \quad \frac{4}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad \frac{24}{25} \\
 x_1 \quad \frac{147.5}{25} \quad \frac{3}{25} \quad \frac{19}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad - \frac{11}{25} \quad \frac{22.5}{25} \quad \frac{3}{25} \quad \frac{19}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad \frac{14}{25} \\
 x_3 \quad \frac{22.5}{25} \quad \frac{3}{25} \quad - \frac{6}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad \frac{1.5}{25} \quad \frac{22.5}{25} \quad \frac{3}{25} \quad \frac{19}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad \frac{1.5}{25} \\
 x_2 \quad \frac{45}{25} \quad \frac{6}{25} \quad - \frac{37}{25} \quad \frac{5}{25} \quad \frac{28}{25} \quad \frac{20}{25} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{13}{25} \quad \frac{5}{25} \quad \frac{3}{25} \\
 x_{10} \quad \frac{22.5}{25} \quad \frac{3}{25} \quad - \frac{31}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad \frac{1.5}{25} \quad \boxed{\frac{22.5}{25} \quad \frac{3}{25} \quad \frac{19}{25} \quad \frac{2.5}{25} \quad \frac{1.5}{25}} \\
 x_{19} \quad -\frac{22.5}{25} \quad -\frac{3}{25} \quad - \quad \boxed{\frac{19}{25}} \quad - \frac{2.5}{25} \quad - \frac{1.5}{25}
 \end{array}$$

$$(-x_6) \quad (-x_{19}) \quad (-x_7) \quad (-x_5)$$

(10)

$$\begin{array}{l}
 G \quad \frac{87.75}{19} \quad \frac{6}{19} \quad \frac{7}{19} \quad \frac{0.25}{19} \quad \frac{3}{19} \\
 x_4 \quad \frac{32.5}{19} \quad -\frac{2}{19} \quad \frac{4}{19} \quad \frac{1.5}{19} \quad - \frac{1}{19} \quad \boxed{\frac{13.5}{19} \quad \frac{17}{19} \quad \frac{4}{19} \quad \frac{1.5}{19} \quad \frac{18}{19}} \\
 x_1 \quad 5 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad - \frac{9.5}{19} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{9.5}{19} \\
 x_3 \quad \frac{22.5}{19} \quad \frac{3}{19} \quad - \frac{6}{19} \quad \frac{2.5}{19} \quad \frac{1.5}{19} \quad \frac{3.5}{19} \quad \frac{3}{19} \quad \frac{13}{19} \quad \frac{2.5}{19} \quad \frac{1.5}{19} \\
 x_2 \quad \frac{67.5}{19} \quad \frac{9}{19} \quad - \frac{37}{19} \quad \frac{7.5}{19} \quad - \frac{4.5}{19} \quad \frac{10.5}{19} \quad \frac{9}{19} \quad \frac{1}{19} \quad \frac{7.5}{19} \quad \frac{4.5}{19} \\
 x_{10} \quad \frac{45}{19} \quad \frac{6}{19} \quad - \frac{31}{19} \quad \frac{5}{19} \quad \frac{3}{19} \quad \frac{7}{19} \quad \frac{6}{19} \quad \frac{7}{19} \quad \frac{5}{19} \quad \frac{3}{19} \\
 x_{14} \quad \frac{22.5}{19} \quad \frac{3}{19} \quad - \frac{25}{19} \quad \frac{2.5}{19} \quad \frac{1.5}{19} \quad \frac{3.5}{19} \quad \frac{3}{19} \quad \frac{13}{19} \quad \frac{2.5}{19} \quad \frac{1.5}{19} \\
 x_{20} \quad -\frac{13.5}{19} \quad -\frac{17}{19} \quad - \frac{4}{19} \quad - \frac{1.5}{19} \quad - \quad \boxed{\frac{18}{19}}
 \end{array}$$

	$(-x_6)$	$(-x_{19})$	$(-x_7)$	$(-x_{20})$										
G	4,5	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	0	$\frac{3}{18}$									
x_4	$\frac{31,5}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{13,5}{18}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{17}{18}$				
x_9	$\frac{96,75}{18}$	$\frac{8,5}{18}$	$\frac{20}{18}$	$\frac{7,5}{18}$	$-\frac{9,5}{18}$	$\frac{6,75}{18}$	$\frac{8,5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{7,5}{18}$	$\frac{8,5}{18}$				
x_3	$\frac{20,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$-\frac{6}{18}$	$\frac{2,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{2,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{2,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$				
x_2	$\frac{47,25}{18}$	$\frac{4,5}{18}$	$-\frac{2}{18}$	$\frac{6,75}{18}$	$\frac{4,5}{18}$	$\frac{11,25}{18}$	$\frac{4,5}{18}$	0	$\frac{6,75}{18}$	$\frac{4,5}{18}$				
(11) x_{10}	$\frac{40,5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$-\frac{30}{18}$	$\frac{4,5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4,5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{4,5}{18}$	$\frac{3}{18}$				
x_{14}	$\frac{20,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$-\frac{24}{18}$	$\frac{2,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{2,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{2,25}{18}$	$\frac{1,5}{18}$				
x_5	$\frac{13,5}{18}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$-\frac{19}{18}$	$\frac{13,5}{18}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{17}{18}$				
x_{32}	$\frac{13,5}{18}$	$-\frac{17}{18}$	$-\frac{4}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$-\frac{17}{18}$									

	$(-x_6)$	$(-x_{19})$	$(-x_{32})$	$(-x_{20})$					
G	4,5	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	0	$\frac{3}{18}$				
x_4	1	-1	0	1	-1				
x_1	5	0	1	0,5	-1				
x_3	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1,5	$-\frac{3}{3}$				
(12) x_2	0	-4	-3	4,5	-4				
x_{10}	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{7}{3}$	3	$-\frac{3}{3}$				
x_{14}	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1,5	$-\frac{4}{3}$				
x_5	0	0	0	1	-2				
x_7	9	$\frac{34}{3}$	$\frac{8}{3}$	-12	$\frac{34}{3}$				

Die Lösung ist optimal und ganzzahlig. Sie lautet: Es sind 5 Einheiten des Produkts A zu produzieren und 1 Einheit der Maschine II zu investieren. 9 Einheiten des Investitionsfonds bleiben unausgenutzt. Der Gewinn beträgt 4,5 Geldeinheiten. Selbstverständlich hätte man bei einem so einfachen Beispiel das Ergebnis auch durch Probieren erzielen können. Hier kam es jedoch darauf an, das Verfahren Gomorys darzustellen. Zusammenfassend kann gesagt werden:

Die Möglichkeit des Auftretens gebrochener Werte bei der Errechnung des optimalen Investitionsprogrammes stellt keine Beeinträchtigung der Verwendungsmöglichkeit des Linear-Programming dar. Mit Hilfe des Gomory-Verfahrens kann die ganzzahlige Optimallösung errechnet werden.

Der besondere Vorteil des Linear Programming liegt darin, daß es mit seiner Hilfe möglich ist, die Wirkungen betrieblicher Handlungen, hier der Investitionen, zu berücksichtigen und alle betrieblichen Handlungen im Hinblick auf eine bestimmte Zielsetzung zu koordinieren. Die Investitionspolitik wird als Teil der Unternehmenspolitik betrachtet. Investitionsentscheidungen sind einige von vielen unternehmerischen Entscheidungen, die alle miteinander koordiniert sein müssen. Diese Forderung wird durch die rechnerische Verknüpfung erfüllt. Die Investitionsrechnung ist in einer Gesamtrechnung aufgegangen. Der errechnete Periodengewinn ist das Ergebnis einer Vielzahl von Entscheidungen. Er ist gleichzeitig das Optimum, das unter den gegebenen Bedingungen und mit den vorhandenen Informationen bei langfristiger Betrachtung erzielbar ist. In diesem Stadium der Behandlung unternehmerischer Entscheidungen befindet sich der Berührungspunkt mit anderen, unter dem Begriff Unternehmensforschung (Operations Research) zusammengefaßten Forschungsmethoden.

Die Unternehmenspolitik wird geformt durch die Daten, denen sich der Betrieb als Mitglied eines Wirtschaftszweiges, einer Volkswirtschaft oder einer noch größeren Wirtschaftsgemeinschaft gegenüberübersieht und durch die verfolgten Ziele des Unternehmens.

Im Rahmen der Unternehmensforschung sind Methoden entwickelt worden, durch welche Einsicht in komplexe Zusammenhänge möglich wurden, die bisher einer rechnerischen Behandlung nicht zugänglich waren. Rechnungen für die Bestimmung der optimalen Unternehmensstrategie können in mancher Hinsicht weniger in Einzelheiten gehen als die gezeigten speziellen Rechnungen. Beide Arten sind jedoch wechselseitig verbunden. Liefert die Unternehmensstrategie den Rahmen für spezielle Rechnungen, so liefern andererseits die speziellen Rechnungen wichtige Daten für die Ermittlung der Optimalstrategie ¹⁾.

¹⁾ Vgl. Ansoff, H.J.: A Model for Diversification, in: "Management Science, Journal of the Institute of Management Sciences", Baltimore July 1958, S. 410 ff.

Literaturübersicht

Anwendung der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme, Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gesellschaft, Nr. 9, Würzburg 1959.

- Albach, Horst Wirtschaftlichkeitsrechnungen bei unsicheren Erwartungen, Köln und Opladen 1959.
- Albach, Horst Investitionspolitik in Theorie und Praxis, in: "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", 28. Jg., Wiesbaden 1958.
- Albach, Horst Lineare Programmierung als Hilfsmittel betrieblicher Investitionsplanung, in: "Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung", Neue Folge, 12. Jg., Heft 9, Köln und Opladen, 1960.
- Albach, Horst Rentabilität und Sicherheit als Kriterien betrieblicher Investitionsentscheidungen in: "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", Nr. 10, Nr. 11, 30. Jg., Wiesbaden 1960.
- Allen, R.G.D. Mathematical Economics, London 1956.
- Ansoff, H.J. A Model for Diversification, in: "Management Sciences", Baltimore, July 1958.
- Beale, M.L. An Alternative Method for Linear Programming, in: "Proceedings of the Cambridge Philosophical Society", Vol. 50, 1954.
- Beckmann, Martin J. Lineare Planungsrechnung, Ludwigshafen 1959.
- Boulding, K.E. Time and Investment, in: "Economica", Vol. III, New Series, London 1936.
- Boulding, K.E. Time and Investment, A Reply, in: "Economica", Vol. III, New Series, London 1936.
- Brandt, Horst Investitionspolitik des Industriebetriebes, Wiesbaden 1959.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Henderson, A. An Introduction to Linear Programming, New York 1953.

- Charnes, A., Cooper, W.W., Mellon, B. A Model for Programming and Sensitivity Analysis in an integrated Oil Company, in: "Econometrica", Vol. 22, Chicago 1954.
- Churchman, C.W., Ackow, R.D., Arnoff, E.L. Introduction to Operations Research, New York 1957.
- Dantzig, G.B. in Koopmans, T.C. (Herausgeber), Activity Analysis of Production and Allocation, New York 1951, S. 339 ff; S. 345 ff.
- Dantzig, G.B. Discrete-Variable Extremum Problems, in: "Operations Research, The Journal of the Operations Research Society of America", Vol. 5, Baltimore 1957.
- Dantzig, G.B., Fulkerson, D.R., Johnson, S.M. Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem, in: "Operations Research, The Journal of the Operations Research Society of America", Vol. 2, Baltimore, 1954.
- Dantzig, G.B., Fulkerson, D.R., Johnson, S.M. On a Linear-Programming, Combinatorial Approach to the Traveling-Salesman Problem, in: "Operations Research, The Journal of the Operations Research Society of America", Vol. 7, Baltimore 1959.
- Dean, Joel Measuring the Productivity of Capital, in: "Harvard Business Review", Vol. 32, Nr. 1, 1954.
- Dorfman, R., Samuelson, P., Solow, R. Linear Programming and Economic Analysis, New York-Toronto-London 1958.
- Dürr, Karl Investitionsrechnung, Band I, Bern 1958.
- Ferguson, Robert O., Sargent, Lauren F. Linear Programming - Fundamentals and Applications, New York-Toronto-London 1958.
- Fersch, Franz Grundzüge des Dynamic Programming, in: "Unternehmensforschung", Band 3, Heft 2, Würzburg 1959, S. 79.

- Förstner, Karl
Henn, Rudolf Dynamische Produktionstheorie und Lineare
 Programmierung, Meisenheim 1957.
- Gomory, Ralph E. An Algorithm for Integer Solutions to
 Linear Programs, in: "Princeton - IBM
 Mathematics Research Project, Technical
 Report Nr. 1" - November 17, 1958 - Prince-
 ton University.
- Gomory, Ralph E. All Integer Programming Algorithm,
 IBM Research Center, Jorktown Heights, New
 York, Research Report R C - 189, January
 29, 1960.
- Gordon, I. Myron The Payoff Period and the Rate of Profit,
 in: "The Journal of Business", Vol. XXVIII,
 Chicago 1955.
- Gutenberg, Erich Zu neueren Entwicklung der Wirtschaftlich-
 keitsrechnung, in: "Zeitschrift für die
 gesamte Staatswissenschaft", Band 108,
 Tübingen 1952.
- Gutenberg, Erich Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre,
 Band I, 4. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidel-
 berg 1958.
- Henderson, A.
Schlaifer, R. Mathematical Programming, in: "Harvard Busi-
 ness Review", Vol. 32, Nr. 3, 1954.
- Knauthe, Erhard Ökonomischer Nutzen und Finanzierung von
 Investitionen in der volkseigenen Industrie,
 Berlin 1958.
- Krelle, W. Ganzzahlige Programmierungen. Theorie und
 Anwendungen in der Praxis, in: "Unterneh-
 mensforschung", Band 2, Heft 4, Würzburg
 1958.

- Krelle, W.,
Künzi, H.P.
Künzi, H.P. Lineare Programmierung, Zürich 1958.
Die Simplexmethode zur Bestimmung einer Ausgangslösung bei bestimmten Linearen-Programmen, in: "Unternehmensforschung", Band 2, Heft 2, Würzburg 1958.
- Laßmann, Gert Die Produktionsfunktion und ihre Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Kostentheorie, Köln und Opladen 1958.
- Lutz, Friedrich und Vera The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951.
- Markowitz, H.
Manne, A.S. On the Solution of Discrete Programming Problems, in: "Econometrica", Vol. 25, Chicago 1957.
- Münstermann, Hans Firmenwert, in: "Handwörterbuch der Betriebswirtschaft", 3., völlig neu bearbeitete Auflage, Stuttgart 1958.
- Munz, Max Langfristige Kapazitätsplanung in Mehrproduktunternehmen, in: "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", 29. Jg., Nr. 10, Wiesbaden 1959, S. 615 ff.
- Munz, Max; Winkel, Harald Beiträge in "Kostenrechnungspraxis", Zeitschrift für Betriebsabrechnung, Kostenrechnung und Planung, Wiesbaden 1959, Nr. 3, Nr. 4, und in "Zeitschrift für Betriebswirtschaft", Wiesbaden 1959, Nr. 5, Nr. 6.
- Pack, Ludwig Betriebliche Investitionen, Begriff-Funktionen-Bedeutungs-Arten, Wiesbaden 1959.
- Paulsson Frenckner, T.: Betriebswirtschaftslehre und Verfahrensforschung Operations Research, in: "Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung", neue Folge, 9. Jg., Köln-Opladen 1959, S. 80.

- Rationalisierungs- Kuratorium der Deutschen Wirtschaft Ablauf- und Planungsforschung, Operations Research, Heft 56, München 1958.
- Rummel, Kurt in Wirtschaftlichkeitsrechnung, Düsseldorf 1941.
- Schindler, Heinz Investitionsrechnungen auf der Basis neuer theoretischer Erkenntnisse, in: "Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung", Neue Folge, 8. Jg., Köln und Opladen 1956.
- Schindler, Heinz Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, Meisenheim/Glan, 1958.
- Schneider, Erich Sinn und Grenzen der quantitativen Wirtschaftsforschung, in: "Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft", Band 108, Tübingen 1952.
- Schneider, Erich Wirtschaftlichkeitsrechnung, 2. Auflage, Tübingen-Zürich 1957.
- Schneider, Erich Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 5. Auflage, Tübingen 1958.
- Schmalenbach, Eugen Kostenrechnung und Preispolitik, 7., erweiterte und verbesserte Auflage, bearbeitet von Dr. Richard Bauer, Köln und Opladen 1956.
- Scholl, Gerhard Die Ermittlung der Produktionskapazität und der Kapazitätsausnutzung in den volkseigenen Industriebetrieben der DDR, Diss. Berlin 1955 (Hochschule für Ökonomie und Planung).
- Stahlknecht, Peter "Linear Programming" bei betriebswirtschaftlichen Problemen mit veränderlichen Bedingungen, Diss. Leipzig 1958.

- Stahlknecht, Peter Optimale Betriebsmatrizen, in: „Unternehmens-
forschung“, Band 3, Heft 1, Würzburg 1959.
- Terborgh, George Dynamic Equipment Policy, New York-Toronto-
London 1949.
- Terborgh, George MAPI Replacement Manual, Chicago 1950.
- Terborgh, George Business Investment Policy, Washington 1958.
- Vajda, S. Readings in Linear Programming, London 1958.
- Vaszsonyi, A. Scientific Programming in Business and Industry,
New York 1958.
- Waugh, F.
Burrows, G. A Short Cut to Linear Programming, in:
"Econometrica", Vol. 23, Chicago 1955.
- Wessels, Th. in Beiträge zur Wirtschaftsrechnung in der
Energieversorgung, Heft 7 der Tagungsberichte
des Energiewirtschaftlichen Institutes an der
Universität Köln.
- Wood, M.K.
Geisler, M.A. in Koopmans, T.C.: Activity Analysis of Produc-
tion and Allocation, New York 1951, S. 189 ff.
- Wright, C.A. A Note on Time and Investment, in:
"Econometrica", Vol. III, New Series, London 1936.

Lebenslauf

Am 14. März 1924 wurde ich in Chemnitz als Sohn des Apothekers Albert Langer geboren.

Nach Besuch der Volksschule trat ich 1934 in die Sexta des Reformrealgymnasiums Chemnitz ein.

An der gleichen Schule legte ich 1942 die Reifeprüfung ab. Anschließend gehörte ich der ehemaligen Kriegsmarine an und wurde 1945 als Leutnant entlassen.

Nach einer kaufmännischen Ausbildung arbeitete ich von 1946 an als kaufmännischer Angestellter.

Von 1952 bis 1956 studierte ich an der Hochschule für Verkehrswesen Dresden und anschließend an der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

Im Frühjahr 1958 legte ich das Staatsexamen ab.

Seit Herbst 1959 bin ich bei den Farbwerken Hoechst tätig.

Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 14.12.1961.

Mainz, Juni 1962

Hermann Langer

